ББК 22.161
Я 47
УДК 517(075.8)

*Издание осуществлено при фина
держке Федеральной целевой
«Государственная поддержка и
высшего образования и фундам
науки на 1997–2000 годы»*

Рецензенты:
член-корреспондент РАН *О. В. Бесов*
член-корреспондент РАН *Е. И. Моисеев*

ЯКОВЛЕВ Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2001.—400 с.—ISBN 5-94052-024-3.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых автором
там первого курса в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Для студентов физических, математических и инженерных специальностей.

ISBN 5-94052-024-3

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций по математическому анализу, читаемых автором студентам первого курса Московского физико-технического института. Оно представляет собой первую часть двухгодичного курса, что соответствует двум первым семестрам. Первая часть учебного пособия содержит девять глав.

В первой главе на основе представления действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей изучаются числовые последовательности, и строится арифметика действительных чисел. Кроме того, рассматриваются различные числовые множества: конечные и бесконечные, счетные и несчетные, открытые и замкнутые, измеримые и неизмеримые.

Вторая глава посвящена в основном изучению свойств функций, непрерывных в точке или на некотором множестве. В частности, доказывается, что при непрерывном отображении образом компакта является компакт, а образом промежутка — промежуток.

В третьей главе даются определения производных и дифференциалов, выводятся правила дифференцирования, и доказываются теоремы о среднем для дифференцируемых функций. В конце рассматриваются первообразные и неопределенные интегралы.

Четвертая глава посвящена исследованию функций с помощью производных: доказываются правила Лопиталя раскрытия неопределенностей, изучаются асимптотические разложения по формуле Тейлора, устанавливаются условия монотонности и выпуклости дифференцируемых функций и условия существования точек экстремума и точек перегиба.

В пятой главе изучаются векторные функции и кривые на плоскости и в пространстве: длина дуги, кривизна и кручение и их свойства.

В шестой главе рассматриваются функции многих переменных, множества точек n-мерного пространства, вводятся некоторые понятия анализа в области комплексных чисел, в частности, доказывается основная теорема алгебры.

В седьмой главе систематически излагается теория интегрирования функций одной переменной. Изучаются как собственные, так и несобственные интегралы и их приложения. Кроме того, рассматриваются криволинейные интегралы и интегралы от функций комплексного переменного.

В последних двух главах излагается теория числовых и функциональных рядов, включая степенные. Особое внимание уделяется свойствам равномерно сходящихся рядов и последовательностей.

Пособие предназначено студентам технических вузов с расширенной программой по математике. Оно может быть использовано и для самостоятельного изучения некоторых вопросов анализа.

В заключение хочу поблагодарить всех членов кафедры высшей математики Московского физико-математического института. Особую благодарность приношу моему учителю, члену-корреспонденту РАН профессору Л.Д.Кудрявцеву, и учителю многих математиков, академику РАН профессору С.М.Никольскому. По их замечательным учебникам учились и учатся многие поколения студентов во всем мире, по ним учился и автор этих лекций. В оформлении рукописи большую помощь мне оказал сотрудник кафедры А.Полозов.

Данная книга выходит в серии "Лекции кафедры высшей математики МФТИ". В этой серии предполагается выход второй части лекций по математическому анализу, а также лекций по уравнениям математической физике и лекций по тензорному анализу.

Издание настоящего учебного пособия оказалось возможным благодаря поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция", за что автор выражает глубокую благодарность.

Глава 1. Последовательности действительных чисел

§ 1. Бесконечные десятичные дроби и действительные числа

1.1. Конечные и бесконечные десятичные дроби. Напомним некоторые понятия, известные из школьного курса математики.

Символы вида

$$+\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{1}$$

$$-\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{1'}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — последовательность из цифр, а α_0 — целое неотрицательное число, называются *бесконечными десятичными дробями* или, короче, *десятичными дробями*.

Десятичная дробь называется *положительной* (*отрицательной*), если она имеет знак $+$ (соотв., знак $-$) и в ее записи имеется хотя бы одна цифра, отличная от 0. Десятичная дробь, в записи которой все цифры равны 0, называется *нулем*.

Десятичная дробь, которая отличается от данной десятичной дроби α только знаком, называется *противоположной* к дроби α и обозначается $-\alpha$. Согласно этому определению, десятичные дроби (1) и (1′) являются *взаимно противоположными*.

Десятичная дробь вида (1) или (1′) называется *конечной*, если существует n такое, что для любого номера i, большего n, $\alpha_i = 0$, т.е. если она имеет вид $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 0 \ldots 0 \ldots$ Вместо этого символа будем писать $\pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, т.е. будем употреблять обычное обозначение конечной десятичной дроби.

Для любой десятичной дроби α вида (1) или (1′) конечная десятичная дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ называется *n-м отрезком дроби α* и обозначается $(\alpha)_n$.

В дальнейшем будем считать, что конечные десятичные дроби мы умеем сравнивать, складывать, вычитать и умножать по обычным правилам арифметики. Опираясь на это, построим арифметику бесконечных десятичных дробей. Множество всех десятичных дробей с такой арифметикой называется *множеством действительных чисел* и обозначается $\mathbb{R}$, а каждая десятичная дробь — *действительным числом*.

1.2. Сравнение десятичных дробей. Введем понятия «равно», «меньше», «больше» для бесконечных десятичных дробей.

Определение 1. Десятичные дроби α и β называются *равными*, если для любого n выполняется неравенство

$$|(\alpha)_n - (\beta)_n| \le 10^{-n}. \tag{1}$$

В этом случае пишут $\alpha = \beta$. В противном случае дроби α и β называют *неравными* и пишут $\alpha \ne \beta$.

Заметим, что здесь через 10^{-n} обозначается соответствующая конечная десятичная дробь: $10^0 = 1$; $10^{-1} = 0,1$; $10^{-2} = 0,01$ и т.д.

Очевидно, что десятичные дроби -0 и $+0$ равны, поэтому вместо -0 или $+0$ пишут просто 0 и говорят, что нуль не имеет знака или что нулю можно приписать любой знак. Десятичная дробь равна нулю тогда и только тогда, когда в ее записи все цифры равны нулю. Если же в записи десятичной дроби α хотя бы одна из цифр отлична от нуля, то $\alpha \ne 0$.

Из данного определения следует, что одинаковые десятичные дроби заведомо равны, но равными могут быть и разные десятичные дроби. Например, $1 = 0,99\ldots9\ldots$ И вообще, легко видеть, что любая периодическая десятичная дробь $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n9\ldots9\ldots$ с периодом 9, у которой $\alpha_n \ne 9$, равна конечной десятичной дроби $\alpha_0,\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)$. Докажем, что только в таком случае разные десятичные дроби равны.

Лемма 1. *Если десятичные дроби* $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ *и* $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ *равны и* $\alpha_0 > \beta_0$, *то* $\alpha_0 = \beta_0 + 1$, $\alpha_n = 0$ *и* $\beta_n = 9$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для удобства данные десятичные дроби обозначим α и β. Тогда из условия $\alpha = \beta$ следует, что

$$|(\alpha)_0 - (\beta)_0| = |\alpha_0 - \beta_0| \le 1.$$

А так как $\alpha_0 > \beta_0$, то $\alpha_0 - \beta_0 = 1$.

Первое утверждение леммы доказано. Для доказательства второго утверждения воспользуемся методом математической индукции.

Для $n = 1$ имеем:

$$(\alpha)_1 - (\beta)_1 = 1+0,\alpha_1 - 0,\beta_1 = 10^{-1},$$

поэтому $9 + \alpha_1 = \beta_1$ и, следовательно, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 9$.

Предположим, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 9$, и докажем, что тогда $\alpha_{n+1} = 0$, $\beta_{n+1} = 9$.

Так как

$$(\alpha)_{n+1} - (\beta)_{n+1} = 10^{-n} + (\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})10^{-n-1},$$

и это все равно 10^{-n-1}, то для α_{n+1} и β_{n+1} получаем уравнение

$$9 + \alpha_{n+1} = \beta_{n+1},$$

из которого следует, что $\alpha_{n+1} = 0$, $\beta_{n+1} = 9$. Лемма 1 доказана.

Очевидным обобщением леммы 1 является следующее утверждение: *Если две разные десятичные дроби α и β равны, то одна из них конечная, а другая периодическая с периодом 9. Причем, если, например, $\alpha = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n 9 \ldots 9 \ldots$ и $\alpha_n \neq 9$, то $\beta = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots (\alpha_n + 1)$.*

Из этого утверждения следует одно из основных свойств равенства — свойство транзитивности:

Если $\alpha = \beta$, а $\beta = \gamma$, то $a = \gamma$.

В дальнейшем везде, где это возможно, будем исключать из рассмотрения периодические десятичные дроби с периодом 9.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha \neq \beta$.

Согласно определению, $\alpha \neq \beta$, если существует некоторое $n = p$, для которого неравенство (1) не выполняется, а выполняется противоположное неравенство

$$|(\alpha)_p - (\beta)_p| > 10^{-p}$$

или, что то же самое,

$$|(\alpha)_p - (\beta)_p| \geq 2 \cdot 10^{-p}.$$

(γ. е β > ν)

Лемма 2. *Если неравенство*

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p} \tag{2}$$

выполняется для $n = p$, то оно выполняется и для любого $n > p$.

Доказательство. Из неравенства (2) при $n = p$ следует, что если α имеет знак $+$, то и β имеет знак $+$. Если же α имеет знак $-$, то β может иметь любой знак.

Пусть сначала α имеет знак $-$, а β — знак $+$. Тогда, очевидно, если $n > p$, то

$$(\beta)_n - (\alpha)_n \geq (\beta)_p - (\alpha)_p.$$

Пусть теперь α и β одного знака. Тогда, если $n > p$, то

$$(\beta)_n - (\alpha)_n = (\beta)_p - (\alpha)_p \pm (0, \beta_{p+1} \ldots \beta_n - 0, \alpha_{p+1} \ldots \alpha_n) \cdot 10^{-p} \geq$$
$$\geq 2 \cdot 10^{-p} - 0, \underbrace{9 \ldots 9}_{(n-p)\text{ раз}} \cdot 10^{-p} = 10^{-p} + 10^{-n}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказанная лемма делает естественным следующее определение.

Определение 2. Будем говорить, что десятичная дробь α *меньше* десятичной дроби β (или, что β *больше* α), и писать $\alpha < \beta$ (соотв., $\beta > \alpha$), если существует n такое, что

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}. \tag{3}$$

Очевидно, $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда α положительна, и $\alpha < 0$ тогда и только тогда, когда α отрицательна.

Из определения 2 следует, что если $\alpha < \beta$, то $-\alpha > -\beta$. Действительно, если для некоторого n выполняется неравенство (3), то для этого n выполняется и неравенство

$$(-\beta)_n - (-\alpha)_n < -10^{-n},$$

т.е. $(-\alpha)_n - (-\beta)_n > 10^{-n}$, и поэтому $-\alpha > -\beta$.

Так определенные понятия «меньше» и «больше» обладают свойством транзитивности:

Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Действительно, согласно определению 2, если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то существуют p и q такие, что

$$(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}, \qquad (\gamma)_q - (\beta)_q > 10^{-q}.$$

Тогда, согласно лемме 2, для n, равного наибольшему из чисел p и q, имеем

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}, \qquad (\gamma)_n - (\beta)_n > 10^{-q}$$

и, следовательно,

$$(\gamma)_n - (\alpha)_n > 10^{-p} + 10^{-q} > 10^{-n}.$$

Согласно определению, справедливость этого неравенства означает, что $\alpha < \gamma$.

Если исключить из рассмотрения периодические десятичные дроби с периодом 9, то, очевидно:

1. дроби α и β равны тогда и только тогда, когда для любого n справедливо равенство $(\alpha)_n = (\beta)_n$;
2. $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда существует n такое, что $(\alpha)_n < (\beta)_n$;
3. $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда $(\alpha)_n \leq (\beta)_n$ для любого n.

1.3. Числовая прямая. В п.1.2 определениями 1 и 2 в множестве десятичных дробей введены *соотношения порядка* «равно», «меньше», «больше» и доказано, что для любых двух десятичных дробей α и β выполняется одно и только одно из трех соотношений порядка: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ или $\alpha > \beta$. Причем, если $\alpha < \beta$, а $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$. Такие множества называются *упорядоченными* или *линейно упорядоченными*.

Действительные числа, возникающие на практике, часто имеют особые обозначения, поэтому будем говорить, что каждое действительное число изображается некоторой десятичной дробью, а каждая десятичная дробь является представлением некоторого действительного числа.

Так как множество бесконечных десятичных дробей, а следовательно, и множество действительных чисел, является линейно упорядоченным множеством, то действительные числа, как обычно, можно изображать точками прямой, на которой выбрано направление и начало отсчета. Поэтому множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел часто называют *действительной* (*числовой*) *прямой* (или *осью*), а действительные числа — *точками* этой прямой.

На числовой прямой, как обычно, определяются *числовые интервалы, отрезки и промежутки*:

$$(a;b), \quad [a;b], \quad [a;+\infty), \quad (-\infty;b)$$

и т.д. В частности, $\mathbf{R} = (-\infty;+\infty)$.

Докажем еще одно свойство множества бесконечных десятичных дробей.

Лемма. *Если $\alpha < \beta$, то существует конечная десятичная дробь γ такая, что $\alpha < \gamma < \beta$.*

Доказательство. Из леммы 2 п.1.2 следует, что если $\alpha < \beta$, то существует p такое, что $(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}$ для любого $n \geq p$, в частности, и для $n = p+1$. Тогда конечная десятичная дробь $\gamma = (\alpha)_{p+1} + 2 \cdot 10^{-p-1}$ удовлетворяет неравенствам $\alpha < \gamma < \beta$.

Действительно,

$$(\gamma)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} = 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1},$$

и поэтому $\alpha < \gamma$. С другой стороны,

$$(\beta)_{p+1} - (\gamma)_{p+1} = (\beta)_{p+1} - \alpha_{p+1} - 2 \cdot 10^{-p-1} >$$
$$> 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1},$$

и поэтому $\gamma < \beta$. Лемма доказана.

Доказанную лемму часто формулируют так:

Между любыми двумя действительными числами лежит конечная десятичная дробь.

Это утверждение формулируют еще и так:

Множество конечных десятичных дробей плотно в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел.

1.4. Кванторы существования и всеобщности. В математических определениях и теоремах часто употребляются выражения «для каждого (любого, всех) ...» и «существует ...такое (такой, такая), что ...» (см., например, определения 1 и 2 из п.1.2). Эти выражения обозначаются соответственно $\forall$ и $\exists$ и называются *кванторами:* $\forall$ — *квантор всеобщности*, $\exists$ — *квантор существования*.

Используя обозначения кванторов, определения 1 и 2 можно сформулировать следующим образом:

$$\alpha = \beta, \text{ если } \forall n: \quad |(\alpha)_n - (\beta)_n| \leq 10^{-n};$$

$$\alpha < \beta, \text{ если } \exists n: \quad (\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}.$$

Здесь двоеточие означает, что после него идет высказывание, которое справедливо для указанных n (в первом определении для всех n, во втором по крайней мере для одного n).

Сформулируем еще два определения:

$$\alpha \neq \beta, \text{ если } \exists n: \qquad |(\alpha)_n - (\beta)_n| > 10^{-n};$$

$$\alpha \not< \beta, \text{ т.е. } \alpha \geq \beta, \text{ если } \forall n: \quad (\beta)_n - (\alpha)_n \leq 10^{-n}.$$

В дальнейшем будем широко пользоваться кванторами $\forall$ и $\exists$, так как они не подвержены разночтениям, их применение часто лучше проясняет смысл соответствующего высказывания, и, наконец, они полезны при конспектировании. Кванторы удобно использовать при построении отрицаний. Например, пусть A и B — некоторые множества, тогда

$$A \subset B, \text{ если, } \forall x \in A: \quad x \in B;$$

$$A \not\subset B, \text{ если, } \exists x \in A: \quad x \notin B.$$

Здесь квантор всеобщности $\forall$ заменяется на квантор существования $\exists$, а условие $x \in B$ на условие $x \notin B$, и наоборот, если эти определения поменять местами.

Иногда будем отступать от указанного порядка написания квантора всеобщности $\forall$. Например, будем писать: $2n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1.5. Десятичные приближения и их свойства. Для любого действительного числа обычным образом определяются верхние и нижние десятичные приближения, которые в некоторых случаях более удобны, чем отрезки соответствующих бесконечных десятичных дробей.

Определение. Для любой десятичной дроби $\alpha \geq 0$ конечные десятичные дроби $(\alpha)_n$ и $(\alpha)_n + 10^{-n}$ называются n-ми *десятичными приближениями* (соотв., *нижним* и *верхним*) и обозначаются $\underline{(\alpha)}_n$ и $\overline{(\alpha)}_n$.

Таким образом, если $\alpha \geq 0$, то, по определению,

$$\underline{(\alpha)}_n = (\alpha)_n, \qquad \overline{(\alpha)}_n = (\alpha)_n + 10^{-n}.$$

Если же $\alpha < 0$, то n-е *десятичные приближения* определяются равенствами:

$$\underline{(\alpha)}_n = (\alpha)_n - 10^{-n}, \qquad \overline{(\alpha)}_n = (\alpha)_n.$$

Лемма 1. *У любого действительного числа α нижние десятичные приближения с возрастанием n не убывают, а верхние — не возрастают, т.е.*

$$\underline{(\alpha)}_n \leq \underline{(\alpha)}_{n+1}, \qquad \overline{(\alpha)}_n \geq \overline{(\alpha)}_{n+1} \qquad \forall n.$$

Кроме того,

$$\underline{(\alpha)}_n \leq \alpha \leq \overline{(\alpha)}_n \quad \forall n.$$

Доказательство. Проведем доказательство для нижних десятичных приближений, для верхних приближений оно проводится аналогично.

Если $\alpha \geq 0$, то

$$\underline{(\alpha)}_{n+1} - \underline{(\alpha)}_n = (\alpha)_{n+1} - (\alpha)_n = 0, \alpha_{n+1} \cdot 10^{-n} \geq 0,$$

а если $\alpha < 0$, то

$$\underline{(\alpha)}_{n+1} - \underline{(\alpha)}_n = (\alpha)_{n+1} - 10^{-n-1} - (\alpha)_n + 10^{-n} =$$
$$= -0, \alpha_{n+1} \cdot 10^{-n} + 0,9 \cdot 10^{-n} \geq 0.$$

Первое утверждение доказано. Второе утверждение докажем методом от противного.

Пусть для некоторого $n = q$ неравенство $\underline{(\alpha)}_n \leq \alpha$ не выполняется, т.е. выполняется неравенство $\underline{(\alpha)}_q > (\alpha)$. Тогда, согласно лемме 2 из п.1.2,

$$\exists p: \quad \left(\underline{(\alpha)}_q\right)_n - (\alpha)_n > 10^{-p} \quad \forall n \geq p.$$

Однако для любого $n > q$ имеем: если $\alpha \geq 0$, то

$$\left(\underline{(\alpha)}_q\right)_n - (\alpha)_n = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_q - \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \leq 0,$$

а если $\alpha < 0$, то

$$\left(\underline{(\alpha)}_q\right)_n - (\alpha)_n = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_q - 10^{-q} + \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n < 0,$$

Следовательно, наше предположение неверное. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для того чтобы выполнялось неравенство $\alpha < \beta$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\exists n: \quad \overline{(\alpha)}_n < \underline{(\beta)}_n. \tag{1}$$

Доказательство. Если $\alpha < \beta$, то, согласно лемме 2 из п.1.2,

$$\exists p: \quad (\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p} \quad \forall n \geq p.$$

Тогда при $n = p + 1$ имеем:

$$\underline{(\beta)}_n - \overline{(\alpha)}_n \geq (\beta)_n - (\alpha)_n - 2 \cdot 10^{-n} > 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-n},$$

что и доказывает необходимость условия (1) для выполнения неравенства $\alpha < \beta$. Докажем достаточность.

Пусть существует $n = p$, для которого выполняется неравенство (1). Тогда, в силу свойств десятичных приближений,

$$\alpha \le \overline{(\alpha)}_p < \underline{(\beta)}_p \le \beta,$$

и поэтому $\alpha < \beta$. Лемма 2 доказана.

§ 2. Предел числовой последовательности

2.1. Числовые последовательности. Подпоследовательности. Числовые последовательности рассматривались еще в школьном курсе математики. Напомним соответствующие понятия и сформулируем их определения в нужной нам форме.

Определение 1. Пусть имеется правило, которое каждому натуральному числу n ставит в соответствие некоторое число a_n. Тогда множество всевозможных пар $(n; a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *числовой последовательностью* и обозначается либо $\{a_n\}$, либо a_n, $n \in \mathbb{N}$, либо $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Пара $(n; a_n)$ называется *n-м элементом* этой последовательности и обозначается просто a_n. Число n называется *номером*, а число a_n — *значением* n-го элемента.

Таким образом, последовательность всегда имеет бесконечно много элементов. Множество значений элементов последовательности может быть как бесконечным, так и конечным, в частности, может состоять из одного элемента (такая последовательность называется *постоянной*).

Определение 2. Последовательность действительных чисел x_n, $n \in \mathbb{N}$, называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что $x_n \le M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если для нее выполняется условие:

$$\exists m: \quad \forall n \quad x_n \ge m.$$

Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Очевидно, последовательность $\{x_n\}$ будет ограниченной, если

$$\exists M: \quad \forall n \quad |x_n| \le M.$$

Примеры. Последовательность, n-й член которой задается формулой $x_n = (-1)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, является ограниченной, так как $-1 \le x_n \le 1$ $\forall n$.

Последовательность $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, является ограниченной снизу, так как $x_n \ge 1$ $\forall n$, но не является ограниченной сверху, так как для любого числа M существует натуральное число n_M такое, что $n_M > M$. Последовательность $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена сверху, но не является ограниченной снизу.

Последовательность $x_n = (-1)^{n-1}n$, $n \in \mathbb{N}$, является неограниченной и сверху, и снизу.

У любого действительного числа x последовательности его верхних и нижних десятичных приближений ограничены. Действительно,

$$\underline{(x)}_0 \leq \underline{(x)}_n \leq \overline{(x)}_n \leq \overline{(x)}_0 \quad \forall n.$$

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *стационарной*, если существует N такое, что $x_n = x_N$ для любого $n \geq N$.

В частности, постоянная последовательность является стационарной.

Очевидно, любая стационарная последовательность является ограниченной, так как множество значений ее элементов содержит лишь конечное число элементов.

Важным классом последовательностей действительных чисел является класс монотонных последовательностей.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*), если

$$\forall n \quad x_n \leq x_{n+1} \quad (\text{соотв., } x_n \geq x_{n+1}).$$

Числовая последовательность называется *монотонной*, если она или монотонно возрастающая, или монотонно убывающая.

Примеры. Последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, не является монотонной. Любая постоянная последовательность является монотонной (и возрастающей, и убывающей). Последовательность $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, монотонно возрастающая, а последовательность $y_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, монотонно убывающая. Вообще, если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастающая, то последовательность $y_n = -x_n$, $n \in \mathbb{N}$, монотонно убывающая, и наоборот.

У любого действительного числа последовательность его нижних десятичных приближений монотонно возрастает, а последовательность верхних приближений монотонно убывает.

Очевидно, любая монотонно возрастающая последовательность ограничена снизу, а монотонно убывающая ограничена сверху.

Теорема. *Если монотонная последовательность целых чисел ограничена, то она стационарная.*

Доказательство. Пусть последовательность целых чисел x_n, $n \in \mathbb{N}$, монотонно возрастает и ограничена сверху. Предположим, что она не является стационарной. Тогда существует n_1 такое, что $x_{n_1} > x_1$; существует n_2 такое, что $x_{n_2} > x_{n_1}$, и т.д. Таким образом строится последовательность n_k, $k \in \mathbb{N}$, такая, что

$$x_{n_k} > x_{n_{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

где $x_{n_0} = x_1$.

Так как x_n — целые числа, то из последнего неравенства следует, что $x_{n_k} \geq x_{n_{k-1}} + 1$, и поэтому

$$x_{n_k} \geq x_1 + k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Полученное неравенство противоречит тому, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Следовательно, наше предположение неверное. Случай монотонно убывающей последовательности рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*убывающей*), если

$$\forall n \quad x_n < x_{n+1} \quad (\text{соотв.,}\ x_n > x_{n+1}).$$

Числовая последовательность называется *строго монотонной*, если она или строго возрастающая, или строго убывающая.

Очевидно, любая строго монотонная последовательность целых чисел является неограниченной.

Определение 6. Последовательность $\{y_k\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall k \quad \exists n = n_k : \quad y_k = x_{n_k},$$

причем последовательность номеров $\{n_k\}$ строго возрастающая. Эта подпоследовательность обозначается $\{x_{n_k}\}$.

Заметим, что при доказательстве теоремы было показано, что если монотонно возрастающая последовательность целых чисел $\{x_n\}$ не является стационарной, то у нее есть строго возрастающая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

2.2. Предел последовательности. Единственность предела. Дадим определение предела числовой последовательности, не употребляя понятий суммы или разности действительных чисел, так как они пока еще не определены.

Определение 1. Число x называется *пределом последовательности* действительных чисел $\{x_n\}$, если выполняется условие: для каждого интервала $(a; b)$, содержащего x, существует номер N такой, что любое x_n, у которого $n \geq N$, содержится в интервале $(a; b)$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или «$x_n \to x$ при $n \to \infty$» и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x.

Сформулируем это определение, используя обозначения кванторов.

Определение 1′. Число x называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если выполняется условие:

$$\forall (a; b) \ni x : \quad \exists N : \quad \forall n \geq N : \quad x_n \in (a; b). \qquad (1)$$

Отметим, что в условии (1) интервал $(a;b)$ может быть как конечным, так и бесконечным. Особо следует подчеркнуть, что номер N зависит от выбора интервала $(a;b)$.

Определение 2. Любой интервал, содержащий заданное число x, называется *окрестностью числа* (или *точки*) x и обозначается $O(x)$.

Используя понятие окрестности точки, определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом:

Число x называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall O(x) \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n \in O(x). \tag{2}$$

Так определенные пределы числовых последовательностей называются *конечными пределами*. Наряду с ними рассматриваются и *бесконечные пределы*.

Определение 3. Говорят, что *последовательность* $\{x_n\}$ *сходится* к $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или «$x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$», если выполняется условие:

$$\forall M \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n > M.$$

Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall m \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n < m.$$

Символы $+\infty$ и $-\infty$ называются *бесконечно удаленными точками* числовой прямой. Естественно считать, что для любого действительного числа a справедливы неравенства $-\infty < a < +\infty$. Числовая прямая $\mathbb{R}$ вместе с бесконечно удаленными точками $-\infty$ и $+\infty$ называется *расширенной прямой* и обозначается $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 4. Любой бесконечный интервал вида $(-\infty; a)$ называется *окрестностью бесконечно удаленной точки* $-\infty$. Аналогично, любой бесконечный интервал вида $(a; +\infty)$ называется *окрестностью бесконечно удаленной точки* $+\infty$.

Используя понятие окрестности, определения конечных и бесконечных пределов можно сформулировать следующим образом:

Точка x расширенной прямой называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если выполняется условие (2).

Докажем, что это определение предела числовой последовательности является корректным в том смысле, что если предел существует, то он единственный. Но прежде докажем одно почти очевидное утверждение.

Лемма. *У любых двух точек расширенной числовой прямой существуют непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Пусть x и y — две точки расширенной числовой прямой, и пусть, для определенности, $x < y$. Тогда, если $x = -\infty$, $y = +\infty$, то, по определению, любой интервал $(-\infty; a)$, где a — некоторое число, является окрестностью точки $x = -\infty$, а интервал $(a; +\infty)$ — окрестностью точки $y = +\infty$, и эти окрестности не пересекаются.

Если x и y — действительные числа, то, в силу леммы п.1.3, существует число a такое, что $x < a < y$. Очевидно, интервал $(-\infty; a)$ — окрестность точки x, а интервал $(a; +\infty)$ — окрестность точки y, и эти окрестности не пересекаются.

Если же $x = -\infty$, а y — действительное число, то, например, интервал $(a; b)$, где $a = \underline{(y)}_0 - 1$ и $b = \overline{(y)}_0 + 1$, является окрестностью точки y, а интервал $(-\infty; a)$ — окрестностью точки $x = -\infty$. Аналогично, если $y = +\infty$, а x — действительное число, то интервал $(a; b)$, где $a = \underline{(x)}_0 - 1$ и $b = \overline{(x)}_0 + 1$, является окрестностью точки x, а интервал $(b; +\infty)$ — окрестностью точки $y = +\infty$, и эти окрестности не пересекаются. Лемма доказана.

Доказанное свойство называется *свойством отделимости точек* числовой прямой. Следствием этого свойства является единственность предела числовой последовательности.

Теорема 1. *Числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный).*

Доказательство. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что существует последовательность $\{x_n\}$, которая имеет два разных предела x и x'. Тогда, в силу доказанной леммы, у x и x' существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(x')$. А так как x и x' — пределы последовательности $\{x_n\}$, то должны выполняться условия:

$$\exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n \in O(x),$$
$$\exists N': \quad \forall n \geq N' \quad x_n \in O(x'),$$

из которых следует, что, например, x_n, у которого $n = \max\{N; N'\}$, принадлежит и $O(x)$, и $O(x')$, что невозможно. Следовательно, наше допущение неверное. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров, которые сформулируем в виде отдельных утверждений.

1. Любая стационарная последовательность имеет предел. Причем, если $\{x_n\}$ такая, что $x_n = c \; \forall n \geq N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Действительно, в этом случае в любой окрестности $O(c)$ точки c лежат все x_n, у которых $n \geq N$.

2. У любого действительного числа x последовательность его верхних (и нижних) десятичных приближений сходится к x.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{(x)}_n = x$.

Возьмем некоторую окрестность $(a; b)$ числа x. (Не ограничивая общности, можно рассматривать только конечные окрестности.) Тогда $a < x < b$, и поэтому

$$\exists N: \quad \overline{(a)}_N < \underline{(x)}_N.$$

Отсюда и из свойств десятичных приближений следуют неравенства:

$$a \le \overline{(a)}_N < \underline{(x)}_N \le x < b, \qquad \underline{(x)}_N \le \underline{(x)}_n \le x \quad \forall n \ge N,$$

из которых следует, что $a < \underline{(x)}_n < b$ для любого $n \ge N$. Так как такое N существует для любой окрестности $(a;b)$ числа x, то наше утверждение доказано.

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{(x)}_n = x$ доказывается аналогично. Из него, в частности, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$, так как 10^{-n} · это n-е верхнее десятичное приближение числа 0.

3. Последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

Для этой последовательности никакая точка расширенной прямой не удовлетворяет условию (2), т.е. для любой точки $x \in \overline{\mathbb{R}}$ выполняется противоположное условие:

$$\exists O(x): \quad \forall N \quad \underbrace{\exists n \ge N}: \quad x_n \notin O(x).$$

Действительно, если $x \ne -1$, то у x и -1 существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(-1)$, и поэтому вне $O(x)$ лежат все x_n с нечетными номерами, так как они равны -1. Если же $x = -1$, то существует $O(-1)$, которая не содержит число 1. Следовательно, данная последовательность не имеет предела.

4. Последовательность $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $+\infty$, а последовательность $y_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $-\infty$.

Действительно, для любого числа $M \ge 0$ положим $N = \overline{(M)}_0 + 1$, тогда $x_n > M$ для любого $n \ge N$. Если же $M < 0$, то $x_n > M$ для любого $n \in \mathbb{N}$.· Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

5. Последовательность $x_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

Для любого действительного числа x положим $a = \underline{(x)}_0 - 1$, $b = \overline{(x)}_0 + 1$, $N = \max\{|a|; |b|\}$. Тогда интервал $(a;b)$ — окрестность точки x, и вне $(a;b)$ лежит любое x_n с номером $n \ge N$, причем, если n нечетное, то $x_n \le a$, а если n четное, то $x_n \ge b$. Следовательно, никакое число не является пределом данной последовательности, и она не сходится ни к $+\infty$ ни к $-\infty$.

Определение 5. Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел. Если же последовательность не имеет конечного предела, то она называется *расходящейся*.

Последовательности из примеров 1 и 2 сходящиеся, а последовательности из примеров 3, 4, 5 расходящиеся. Отметим, что последовательности из примера 4 сходятся к $+\infty$ и, соотв., к $-\infty$, однако они являются расходящимися, поэтому иногда говорят, что они расходятся к $+\infty$ и, соотв., к $-\infty$.

Теорема 2. *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу x, и пусть $(a;b)$ — некоторая конечная окрестность числа x. Тогда существует N такое, что $a < x_n < b$ для любого $n \geq N$, и поэтому вне интервала $(a;b)$ могут быть лишь $x_1, \ldots, x_{N-1}$. Если через m и M обозначим наименьшее и наибольшее из чисел $a, b, x_1, \ldots, x_{N-1}$, то, очевидно, $m \leq x_n \leq M$ для любого n. Теорема 2 доказана.

Заметим, что обратное утверждение неверное. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, но не имеет предела.

Теорема 3. *Если последовательность сходится к $+\infty$, то она является ограниченной снизу и неограниченной сверху. Если же она сходится к $-\infty$, то она ограничена сверху и неограничена снизу.*

Доказать в качестве упражнения.

Теорема 4. *Если последовательность имеет предел (конечный или бесконечный), то и любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

Доказательство. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда

$$\forall O(x) \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n \in O(x), \tag{3}$$

а так как $n_k \geq k$, то $x_{n_k} \in O(x)$ $\forall k \geq N$, где $O\{x\}$ — та же окрестность, что и в условии (3). Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Теорема 4 доказана.

2.3. Переход к пределу в неравенствах. Сформулируем и докажем несколько свойств пределов числовых последовательностей, связанных со свойством упорядоченности множества действительных чисел.

Теорема 1. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы (конечные или бесконечные) и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n,$$

то существует N такое, что $x_n < y_n$ $\forall n \geq N$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. По условию теоремы, $x < y$, и поэтому существует число a такое, что $x < a < y$. Тогда, согласно определению предела, имеем:

$$\exists N_1: \quad \forall n \geq N_1 \quad x_n \in (-\infty; a);$$

$$\exists N_2: \quad \forall n \geq N_2 \quad y_n \in (a; +\infty).$$

Следовательно, если $N = \max\{N_1; N_2\}$, то $x_n < a < y_n \quad \forall n \geq N$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы и существует N_0 такое, что $x_n \leq y_n \quad \forall n \geq N_0$, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n,$$

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы 1 и доказывается методом от противного. Действительно, если предположить, что $x > y$, то, согласно теореме 1,

$$\exists N : \quad \forall n \geq N \quad x_n > y_n,$$

что противоречит условию. Следовательно, $x \leq y$. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и существует N такое, что $x_n \leq b$ (или $\geq a$) для любого $n \geq N$, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq b \quad (\text{соотв.,} \quad \lim_{n\to\infty} x_n \geq a).$$

Заметим, что если $\{x_n\}$ сходится к x и, например, $x_n > a \ \forall n$, то можно лишь утверждать, что $x \geq a$, и нельзя утверждать, что $x > a$. Например, $10^{-n} > 0 \ \forall n$, но, как уже доказано, $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$.

Теорема 3. *Пусть числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условию:*

$$\exists N : \quad \forall n \geq N \quad x_n \leq y_n.$$

Тогда, если $x_n \to +\infty$, то и $y_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Если же $y_n \to -\infty$, то и $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Из того, что $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, следует, что

$$\forall M \quad \exists N_M : \quad \forall n \geq N_M \quad x_n > M.$$

А так как $y_n \geq x_n \ \forall n \geq N$, то

$$y_n > M \quad \forall n \geq N'_M,$$

где $N'_M = \max\{N; N_M\}$ Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условию:*

$$\exists N_0 : \quad \forall n \geq N_0 \quad x_n \leq y_n \leq z_n.$$

Тогда, если $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся и их пределы равны, то $\{y_n\}$ тоже сходится к тому же пределу.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Возьмем некоторую окрестность $(a;b)$ точки c. Тогда

$$\exists N_1 : \quad \forall n \geq N_1 \quad x_n \in (a;b),$$

а так как и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, то

$$\exists N_2 : \quad \forall n \geq N_2 \quad z_n \in (a;b),$$

и поэтому, если $N = \max\{N_0; N_1; N_2\}$, то

$$\forall n \geq N \quad a < x_n \leq y_n \leq z_n < b.$$

Следовательно, для любой заданной окрестности $(a;b)$ точки c существует N такое, что

$$\forall n \geq N \quad y_n \in (a;b).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. Теорема 4 доказана.

Эта теорема называется *теоремой о трех последовательностях* или *теоремой о двух полицейских*.

2.4. Монотонные последовательности. Из теоремы 1 п.2.1 и из примера 1 п.2.2 следует, что если монотонная последовательность целых чисел ограничена, то она стационарная и, следовательно, имеет конечный предел. Легким обобщением этого утверждения является следующая лемма.

Лемма 1. *Если монотонная последовательность k-значных десятичных дробей ограничена, то она стационарная и, следовательно, имеет конечный предел.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность k-значных десятичных дробей. Тогда, очевидно, последовательность $y_n = x_n \cdot 10^k$, $n \in \mathbb{N}$, — это последовательность целых чисел, причем, если $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то и $\{y_n\}$ монотонная и ограниченная. По теореме 1 п.2.1, $\{y_n\}$ стационарная, и поэтому она имеет предел. Очевидно, последовательность $x_n = y_n \cdot 10^{-k}$, $n \in \mathbb{N}$, тоже стационарная, и поэтому имеет предел, причем если $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает), то

$$x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \quad (\text{соотв.}, \ x_n \geq \lim_{n\to\infty} x_n) \quad \forall n.$$

Лемма 1 доказана.

Сформулируем еще одно очевидное утверждение.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность десятичных дробей x_n, $n \in \mathbb{N}$, среди которых нет периодических с периодом 9. Тогда, если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает), то и последовательность их k-х отрезков $y_n = (x_n)_k$, $n \in \mathbb{N}$,* *монотонно возрастает (соотв., убывает). Причем, если* $\{x_n\}$ *ограничена, то и* $\{y_n\}$ *ограничена.*

Теперь сформулируем и докажем одну из фундаментальных теорем математического анализа — *теорему о существовании предела у монотонной последовательности.*

Теорема 1. *Если монотонная последовательность действительных чисел ограничена, то она имеет конечный предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является монотонной и ограниченной. Напомним, что каждое x_n — это бесконечная десятичная дробь. Будем считать, что среди $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нет периодических дробей с периодом 9. Тогда, в силу леммы 2, для любого фиксированного k последовательность конечных k-значных десятичных дробей $y_n = (x_n)_k$, $n \in \mathbb{N}$, является монотонной и ограниченной, и поэтому (см. лемму 1) она будет стационарной. Следовательно, для каждого k существует N_k такое, что

$$(x_n)_k = p_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \quad \forall n \geq N_k,$$

где p_0 — некоторое целое число. Очевидно, последовательность $N_1, N_2, \ldots, N_k, N_{k+1}, \ldots$ монотонно возрастающая, так как если

$$(x_n)_{k+1} = p_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1} \quad \forall n \geq N_{k+1},$$

то и $(x_n)_k = p_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ $\forall n \geq N_k$, и поэтому $N_k \leq N_{k+1}$.

Индукцией по k строится число $x = p_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots$ такое, что

$$\forall k \ \exists N_k : \quad \forall n \geq N_k \quad (x_n)_k = (x)_k.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Выберем некоторую окрестность $O(x)$ точки x. Не ограничивая общности, можно считать, что окрестность $O(x)$ конечная. Пусть $O(x) = (a, b)$, т.е. $a < x < b$.

Из неравенств $a < x < b$ следует, что существует $k = k_0$ такое, что

$$\overline{(a)}_{k_0} < (x)_{k_0} < \underline{(b)}_{k_0}.$$

По построению числа x, существует N_0 такое, что $(x_n)_{k_0} = (x)_{k_0}$ $\forall n \geq N_0$. Следовательно,

$$a < (x_n)_{k_0} < b \quad \forall n \geq N_0.$$

Таким образом, для произвольно выбранной окрестности $O(x)$ точки x существует номер $N = N_0$ такой, что $a < x_n < b$ $\forall n \geq N$. Согласно определению предела, это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если монотонная последовательность действительных чисел является неограниченной, то она имеет бесконечный предел. Причем, если эта последовательность возрастает, то ее предел равен $+\infty$, а если монотонно убывает, то он равен $-\infty$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и является неограниченной. Тогда, в силу неограниченности сверху, для любого числа M существует n_M такое, что $x_{n_M} > M$, а в силу монотонности, отсюда следует, что

$$x_n > M \quad \forall n \geq n_M.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Аналогично доказывается, что если $\{x_n\}$ монотонно убывает, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, справедливо утверждение: *Любая монотонная последовательность имеет предел, конечный, если она ограниченная, или бесконечный, если она неограниченная.*

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, (убывает) и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то*

$$x_n \leq x \quad (\text{соотв.,}\ x_n \geq x) \quad \forall n.$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Тогда

$$\forall n, \quad \forall k \quad x_n \leq x_{n+k}.$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем $x_n \leq x \quad \forall n$.

Случай монотонно убывающей последовательности рассматривается аналогично. Следствие доказано.

§ 3. Арифметика действительных чисел

3.1. Лемма о единственности. В этом параграфе построим арифметику действительных чисел, т.е. определим сумму, разность, произведение и частное действительных чисел и докажем их свойства. Но прежде всего докажем одну лемму, которую удобно использовать при доказательстве свойств арифметических операций.

Лемма. *Пусть $\{r_n\}$ и $\{R_n\}$ — последовательности конечных десятичных дробей таких, что*

$$r_n \leq R_n \quad \forall n, \quad \lim_{n\to\infty}(R_n - r_n) = 0. \tag{1}$$

Тогда, если числа x и y принадлежат отрезку $[r_n; R_n]$ при любом n, то $x = y$.

Доказательство. Заметим, что хотя разность действительных чисел еще не определена, однако мы считаем, что разнос конечных десятичных дробей уже определена, и поэтому можно говорить о пределе разности $R_n - r_n$ в условии (1).

Доказывать будем методом от противного. Предположим, что $x \neq y$. Пусть, например, $x < y$. Тогда

$$\exists n_0 : \overline{(x)}_{n_0} < \underline{(y)}_{n_0},$$

и поэтому

$$r_n \le x \le \overline{(x)}_{n_0} < \underline{(y)}_{n_0} \le y \le R_n \quad \forall n.$$

Следовательно, $R_n - r_n \ge 10^{-n_0}$ $\forall n$, что противоречит условию (1), и поэтому наше предположение неверное. Лемма доказана.

3.2. Сумма и разность действительных чисел. Напомним, что мы считаем, что сумма и разность для конечных десятичных дробей уже определены и известны их свойства. Опираясь на это, определим сумму и разность для любых действительных чисел и докажем их основные свойства.

Определение 1. Для любых действительных чисел a и b предел последовательности

$$r_n = \underline{(a)}_n + \underline{(b)}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

называется *суммой чисел* a и b и обозначается $a + b$.

Очевидно, сумма любых двух действительных чисел a и b существует, так как последовательность (1) монотонно возрастает и ограничена сверху, например, целым числом $\overline{(a)}_0 + \overline{(b)}_0$, и поэтому имеет конечный предел.

В определении суммы чисел a и b вместо последовательности (1) можно рассматривать последовательность

$$R_n = \overline{(a)}_n + \overline{(b)}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

которая монотонно убывает и ограничена снизу. Ее предел равен пределу последовательности (1). Действительно, если $\underline{c}$ и $\overline{c}$ — пределы последовательностей (1) и (2), соответственно, то, как известно,

$$r_n \le \underline{c} \le \overline{c} \le R_n \quad \forall n.$$

А так как $R_n - r_n = 2 \cdot 10^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, то, в силу леммы о единственности, $\underline{c} = \overline{c}$. Таким образом,

$$a + b = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{(a)}_n + \underline{(b)}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{(a)}_n + \overline{(b)}_n\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что сумма любых двух действительных чисел определена однозначно, хотя числа a и b могут иметь неоднозначные представления в виде десятичных дробей.

Из теоремы о пределе промежуточной последовательности следует, что

$$a + b = \lim_{n\to\infty} \left((a)_n + (b)_n\right).$$

Определение 2. Для заданного числа a число b, обладающее свойством $a+b=0$, называется *противоположным* и обозначается $-a$.

Свойства сложения:

1. $a+0=a$ (*нейтральность нуля*);
2. $a+b=b+a$ (*коммутативность*);
3. если $a \le b$, то $a+c \le b+c$ (*монотонность*);
4. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность*);
5. любое действительное число имеет единственное *противоположное*.

Свойства 1 и 2 очевидны. Чтобы доказать свойство 3, будем считать, что ни одно из чисел a, b и c не является периодической десятичной дробью с периодом 9. Тогда

$$\underline{(a)}_n + \underline{(c)}_n \le \underline{(b)}_n + \underline{(c)}_n \quad \forall n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $a+c \le b+c$.

Для доказательства свойства 4 заметим, что, в силу свойства монотонности суммы, числа $(a+b)+c$ и $a+(b+c)$ лежат между конечными десятичными дробями

$$r_n = \underline{(a)}_n + \underline{(b)}_n + \underline{(c)}_n, \quad R_n = \overline{(a)}_n + \overline{(b)}_n + \overline{(c)}_n$$

для любого n. А так как $R_n - r_n = 3 \cdot 10^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, то по лемме п.3.1 эти числа равны.

Наконец, если a и $-a$ — взаимно противоположные десятичные дроби, то $(a)_n + (-a)_n = 0$ для любого n, и поэтому $a+(-a)=0$, что и доказывает существование противоположного у любого действительного числа. Если теперь предположить, что некоторое число b является противоположным к числу a, то

$$b = b+0 = b+a+(-a) = 0+(-a) = -a,$$

что и доказывает единственность противоположного.

Определение 3. Для любых действительных чисел a и b число $a+(-b)$ называется *разностью чисел* a и b и обозначается $a-b$.

В конце заметим, что справедливы равенства

$$-(-a) = a, \quad -(a+b) = (-a)+(-b).$$

Действительно,

$$-(a+b) = -(a+b) + (a+b) + (-a) + (-b) = \\ = 0 + (-a) + (-b) = (-a) + (-b),$$

что и доказывает второе равенство. Первое равенство доказывается аналогично.

3.3. Произведение и частное действительных чисел. Для любых действительных чисел a и b последовательность

$$x_n = (a)_n(b)_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

монотонна и ограниченна: если a и b одного знака, то она монотонно возрастает, а если разных знаков, то монотонно убывает. Следовательно, для любых a и b последовательность (1) имеет конечный предел.

Определение 1. Для любых действительных чисел a и b предел последовательности (1) называется *произведением чисел* a и b и обозначается ab.

Очевидно, если $a = 0$ или $b = 0$, то последовательность (1) постоянная: $x_n = 0\ \forall n$. Если же $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x_n = (\underline{|a|})_n(\underline{|b|})_n$, когда a и b одного знака, и $x_n = -(\underline{|a|})_n(\underline{|b|})_n$, когда a и b разных знаков.

В определении произведения чисел a и b вместо последовательности (1) можно рассматривать последовательность, заданную формулами $y = (\overline{|a|})_n(\overline{|b|})_n$, если a и b одного знака, и $y_n = -(\overline{|a|})_n(\overline{|b|})_n$, если a и b разных знаков, которая для любых a и b монотонная и ограниченная. Последовательность $\{y_n\}$ монотонно убывает и $x_n < y_n$, если a и b одного знака, и монотонно возрастает и $x_n > y_n$, если a и b разных знаков. Кроме того,

$$\begin{aligned}|y_n - x_n| &= (\overline{|a|})_n(\overline{|b|})_n - (\underline{|a|})_n(\underline{|b|})_n = \\ &= (\overline{|a|})_n(\overline{|b|})_n - (\underline{|a|})_n(\overline{|b|})_n + (\underline{|a|})_n(\overline{|b|})_n - (\underline{|a|})_n(\underline{|b|})_n = \\ &= 10^{-n}(\overline{|b|})_n + (\underline{|a|})_n \cdot 10^{-n} \leq ((\overline{|b|})_0 + (\overline{|a|})_0) \cdot 10^{-n} \to 0\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$ab = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что произведение любых двух действительных чисел определено однозначно, хотя эти числа могут иметь неоднозначные представления в виде десятичных дробей.

Определение 2. Для заданного числа a число b, обладающее свойством $ab = 1$, называется *обратным* и обозначается a^{-1}.

Свойства умножения:

1. $a \cdot 0 = 0$ (*поглощение нулем*);
2. $a \cdot 1 = a$ (*нейтральность единицы*);
3. $ab = ba$ (*коммутативность*);
4. если $a \leq b$ и $c \geq 0$, то $ac \leq bc$, а если $a \leq b$ и $c \leq 0$, то $ac \geq bc$ (*монотонность*);
5. $a(b + c) = ab + ac$ (*дистрибутивность*);
6. $a(bc) = (ab)c$ (*ассоциативность*);
7. любое действительное число, отличное от нуля, имеет единственное обратное.

Свойства 1, 2 и 3 очевидные. Для доказательства свойства 4 будем считать, что ни одно из чисел a, b и c не является периодической десятичной дробью с периодом 9. Тогда, если $a \leq b$ и $c \geq 0$, то

$$(a)_n(c)_n \leq (b)_n(c)_n \quad \forall n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $ac \leq bc$. Случай, когда $c \leq 0$, рассматривается аналогично.

Доказательство свойства 5 наиболее громоздкое: нужно рассмотреть всевозможные комбинации знаков чисел a, b, c и $b+c$. В случае, когда $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, из монотонности произведения и суммы следует, что числа $a(b+c)$ и $ab+ac$ лежат между конечными десятичными дробями

$$r_n = \underline{(a)}_n(\underline{(b)}_n + \underline{(b)}_n) \text{ и } R_n = \overline{(a)}_n(\overline{(b)}_n + \overline{(b)}_n) \quad \forall n.$$

Легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(R_n - r_n) = 0$. Тогда, в силу леммы о единственности, рассматриваемые числа равны, что и доказывает свойство 5 в этом случае. Все другие возможные случаи рассмотреть в качестве упражнения.

Из дистрибутивности произведения следует так называемое *правило знаков*, т.е. равенства:

$$a \cdot (-b) = -(ab), \qquad (-a)\cdot(-b) = ab.$$

Действительно,

$$a\cdot(-b) = a\cdot(-b) + 0 = a\cdot(-b) + ab - (ab) =$$
$$= a(-b+b) - (ab) = a\cdot 0 - (ab) = -(ab).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Для доказательства свойства 6 заметим, что для неотрицательных чисел оно доказывается так же, как и свойство 4 для сложения, а в других случаях нужно воспользоваться правилами знаков. Полное доказательство предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения.

В заключение докажем свойство 7. Сначала докажем единственность обратного, т.е. докажем, что из равенств $ab = 1$ и $ac = 1$ следует равенство $b = c$. Действительно,

$$b = b\cdot 1 = b(ac) = (ba)c = 1\cdot c = c.$$

Теперь докажем существование обратного. Пусть $a > 0$. Выберем целое $\beta_0 \geq 0$ так, чтобы

$$a\cdot\beta_0 \leq 1 < a\cdot(\beta_0 + 1),$$

а затем первый десятичный знак β_1 так, чтобы

$$a\cdot\beta_0,\beta_1 \leq 1 < a\cdot(\beta_0,\beta_1 + 10^{-1}),$$

и т.д. По индукции строится число $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ такое, что

$$a \cdot \underline{(b)}_n \leq 1 < a \cdot \overline{(b)}_n \quad \forall n.$$

Положим $r_n = \underline{(a)}_n \underline{(b)}_n$, $R_n = \overline{(a)}_n \overline{(b)}_n$. Очевидно, что

$$r_n \leq 1 \leq R_n, \qquad r_n \leq ab \leq R_n \quad \forall n$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}(R_n - r_n) = 0$. Следовательно, числа 1 и ab удовлетворяют всем условиям леммы о единственности, и поэтому $ab = 1$.

Случай $a < 0$ рассмотреть в качестве упражнения.

Определение 3. Для любого действительного числа a и любого числа $b \neq 0$ число $a \cdot b^{-1}$ называется *частным от деления* a на b и обозначается $\dfrac{a}{b}$ или $a : b$.

Легко доказать, что

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1}), \quad (a^{-1})^{-1} = a, \quad a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}.$$

Например,

$$(-a)^{-1} = (-a)^{-1} \cdot 1 = (-a)^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} =$$
$$= (-a)^{-1} \cdot (-a) \cdot (-(a^{-1})) = 1 \cdot (-(a^{-1})) = -(a^{-1}).$$

Другие равенства доказываются аналогично. Предлагается доказать их в качестве упражнения.

Из доказанных свойств сложения и умножения легко выводятся известные правила сложения, вычитания, умножения и деления дробей $\dfrac{a}{b}$, где a, b — действительные числа.

Доказать эти правила в качестве упражнения.

3.4. Степени с целыми показателями. Напомним, что степень a^p с целым показателем p определяется следующим образом:

если $p = n \in \mathbb{N}$, то $a^p = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n}$;

если $p = -n$ и $a \neq 0$, то $a^p = (a^{-1})^n$;

если $p = 0$ и $a \neq 0$, то $a^p = 1$.

Так как $a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot (a^{-1})^n = (a \cdot a^{-1})^n = 1$, то $a^{-n} = (a^n)^{-1}$. Таким образом,

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}.$$

Теорема. *Пусть a и b — положительные действительные числа, а p и q — целые числа. Тогда*:

1. $(ab)^p = a^p b^p$;
2. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. *если* $a > 1$ *и* $p < q$, *то* $a^p < a^q$;
   если $a < 1$ *и* $p < q$, *то* $a^p > a^q$;
5. *если* $a < b$ *и* $p > 0$, *то* $a^p < b^p$;
   если $a < b$ *и* $p < 0$, *то* $a^p > b^p$.

Доказательство. Для $p \geq 0$ и $q \geq 0$ все свойства степеней следуют непосредственно из определения степени и соответствующих свойств умножения. Рассмотрим другие случаи.

Если $p = -n$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$(ab)^p = ((ab)^{-1})^n = (a^{-1} \cdot b^{-1})^n = (a^{-1})^n \cdot (b^{-1})^n = a^p b^p,$$

и, следовательно, свойство 1 доказано.

Если $p = -n$, $q = m$, $n > 0$, $m \geq 0$, то

$$(a^p)^q = ((a^{-1})^n)^m = (a^{-1})^{nm} = a^{pq}.$$

Если, кроме того, $m > n$, то

$$a^p \cdot a^q = (a^{-1})^n \cdot a^n \cdot a^{m-n} = a^{m-n} = a^{p+q}$$

и, следовательно, свойства 2 и 3 для таких p и q доказаны. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Свойства 4 и 5 почти очевидные. Действительно, если, например, $a > 1$, $p < q$, $p = -n$, $q = -m$, то $a^{-1} < 1$, $n > m$ и, следовательно,

$$a^p = (a^{-1})^n < (a^{-1})^m = a^q.$$

Теорема доказана.

3.5. Неравенство Бернулли и число e. Сначала докажем, что для любого $\alpha \geq -1$ справедливо неравенство

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Оно называется *неравенством Бернулли*.

Доказывать будем методом математической индукции. Для $n = 1$ неравенство (1) очевидно. Покажем, что если оно верно для некоторого n, то оно верно и для $n+1$. Действительно, если $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ и $1 + \alpha \geq 0$, то

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha) \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

Следовательно, неравенство (1) справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что для $n > 1$ и $\alpha \neq 0$, $\alpha \geq -1$, справедливо строгое неравенство:

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

Пример 1. Доказать, что если $a > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Решение. Положим $a - 1 = \alpha$. Тогда $\alpha > 0$, $a = 1 + \alpha$ и

$$a^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha = +\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = +\infty$.

Рассмотрим теперь последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Она ограничена снизу, так как $x_n > 1$, и монотонно убывает. Действительно,

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$$
$$= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}.$$

Отсюда, применяя неравенство Бернулли, получаем:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} > \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) = 1.$$

Следовательно, последовательность (2) имеет конечный предел.

Предел последовательности (2) называется *числом e*.

Из формулы (2) следует, что $1 \le e < 4$. Более точные вычисления показывают, что $e \approx 2,718281828459045$. Доказывается, что число e иррациональное.

Число e в математике играет особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов.

§ 4. Предел суммы, разности, произведения и частного

4.1. ε-окрестности. До сих пор, пока не были определены сумма и разность действительных чисел, при определении предела мы пользовались произвольными окрестностями точки. Однако во многих случаях удобнее работать с симметричными окрестностями, когда рассматриваемая точка является серединой окрестности.

Определение. Любой интервал вида $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью точки* x_0 и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$.

Лемма. *Число x_0 является пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad x_n \in O_\varepsilon(x_0). \tag{1}$$

Доказательство. Если x_0 — предел последовательности $\{x_n\}$, то, очевидно, выполняется и условие (1), так как ε-окрестность есть частный вид окрестности.

Наоборот, пусть выполняется условие (1), и пусть $(a; b)$ — некоторая окрестность точки x_0, т.е. $a < x_0 < b$. Положим

$\varepsilon = \min\{x_0 - a; b - x_0\}$. Тогда, в силу условия (1), существует N такое, что

$$\forall n \geq N \quad x_n \in O_\varepsilon(x_0) \subset (a; b).$$

Так как $(a; b)$ — произвольная окрестность точки x_0, то, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Лемма доказана.

Заметим, что условие (1) часто записывают так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_0| < \varepsilon, \tag{2}$$

и во многих учебниках это условие является основой определения предела последовательности. А именно, часто дается такое определение:

Число x_0 называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если выполняется условие (2).

Следует отметить, что это определение является корректным, если сумма и разность действительных чисел определены без использования предела последовательности.

4.2. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Прежде всего докажем одно простое, но полезное утверждение, которое указывает на особую роль последовательностей, сходящихся к нулю.

Лемма 1. *Для того чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *необходимо и достаточно, чтобы для* a_n *выполнялось условие:*

$$a_n = a + \alpha_n \quad и \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то, положив $\alpha_n = a_n - a$, видим, что $a_n = a + \alpha_n$ и, в силу леммы из п.4.1, выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |\alpha_n| = |a_n - a| < \varepsilon, \tag{2}$$

и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Наоборот, если выполняется условие (1), то выполняется условие (2), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Лемма 1 доказана.

Определение 1. Любая последовательность, сходящаяся к нулю, называется *бесконечно малой*.

Очевидно, последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $x_n = |\alpha_n|$, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно малая.

Определение 2. Пусть заданы две числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Тогда последовательности с n-ми членами

$$x_n = a_n + b_n, \qquad y_n = a_n - b_n,$$

$$z_n = a_n b_n, \qquad u_n = \frac{a_n}{b_n},$$

называются соответственно *суммой, разностью, произведением* и *частным данных последовательностей* и обозначаются $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$.

Лемма 2. *Сумма (и разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N'_\varepsilon : \quad \forall n \geq N'_\varepsilon \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists N''_\varepsilon \quad \forall n \geq N''_\varepsilon \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon; N''_\varepsilon\}$, то

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = 0$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\{b_n\}$ — ограниченная. Тогда

$$\exists M : \quad \forall n \quad |b_n| \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M+1},$$

и поэтому

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad |\alpha_n b_n| \leq M \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n b_n) = 0$. Лемма 3 доказана.

Следствие. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Таким образом, сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Однако частное бесконечно малых последовательностей может быть любой последовательностью.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. В этом случае иногда пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Очевидно, если последовательность $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел $+\infty$ или $-\infty$, то она бесконечно большая. Обратное утверждение является неверным. Например, последовательность

$x_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно большая, но не имеет предела, ни конечного, ни бесконечного.

Теорема. *Последовательность $\{\alpha_n\}$, у которой $\alpha_n \neq 0$ $\forall n$, является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, бесконечно большая.*

Доказательство. Если $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то для любого $M > 0$, полагая $\varepsilon = 1/M$, имеем:

$$\exists N : \quad \forall n \geq N \quad |\alpha_n| < \frac{1}{M}, \quad \frac{1}{|\alpha_n|} > M,$$

и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| = +\infty$. Очевидно, и наоборот. Теорема доказана.

Заметим, что сумма, разность и частное двух бесконечно больших последовательностей может быть любой последовательностью. Можно лишь утверждать, что произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

4.3. Предел суммы, разности и произведения. На основе свойств бесконечно малых последовательностей легко доказываются свойства пределов, связанных с арифметическими операциями.

Теорема 1. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то их сумма, разность и произведение тоже сходятся и предел суммы равен сумме пределов, предел разности равен разности пределов, предел произведения равен произведению пределов, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Тогда, в силу леммы 1 из п.4.2,

$$a_n = a + \alpha_n, \qquad b_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые. Поэтому

$$a_n \pm b_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n),$$

$$a_n b_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n),$$

где последовательности $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ и $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$, в силу лемм 2 и 3 из п.4.2, бесконечно малые. Отсюда и из леммы 1 п.4.2 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Теорема доказана.

Отметим, что доказанная теорема справедлива лишь для последовательностей, которые имеют конечные пределы. Если же хотя бы одна из последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ не имеет предела или имеет бесконечный предел, то утверждения теоремы в общем случае являются неверными.

4.4. Предел модуля и предел частного. Сначала рассмотрим предел модуля.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |b|$.

Доказательство следует из неравенства

$$||b_n| - |b|| \le |b_n - b|.$$

Обратное утверждение является неверным. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in N$, не имеет предела, а последовательность $\{|x_n|\}$ постоянная: $|x_n| = 1 \quad \forall n$.

Лемма. *Если последовательность* $\{b_n\}$, *у которой* $b_n \neq 0$ $\forall n$, *сходится к* $b \neq 0$, *то последовательность* $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ *ограничена.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = |b|$. Поэтому существует N такое, что

$$\forall n \ge N \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \le \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_N|}, \frac{2}{|b|}\right\} \quad \forall n.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся и, кроме того,* $b_n \neq 0$ $\forall n$ *и предел* $\{b_n\}$ *отличен от нуля, то последовательность* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$$

т.е. предел частного равен частному пределов.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Тогда $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и поэтому

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \gamma_n,$$

где $\gamma_n = \dfrac{\alpha_n b - a\beta_n}{b_n b} \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. Теорема 2 доказана.

Пример 1. Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{n^2+n-13}{2n^2-n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Последовательность $\{x_n\}$ есть частное последовательностей $u_n = n^2+n-13$ и $v_n = 2n^2-n+1$, $n \in \mathbb{N}$, однако здесь нельзя применить теорему о пределе частного, так как последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ не имеют конечных пределов. Чтобы применить эту теорему, преобразуем формулу, задающую x_n, а именно, числитель и знаменатель разделим на n^2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{13}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти предел последовательности

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Последовательность $\{y_n\}$ несколько отличается от последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

рассмотренной в п.3.5. Там было показано, что она монотонно убывает и имеет конечный предел, который был назван числом e. Из теоремы о пределе частного следует, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = e.$$

Покажем еще, что последовательность $\{y_n\}$ монотонно возрастает. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

§ 5. Степени и логарифмы

5.1. Степени с рациональными показателями. Прежде всего дадим определение арифметического корня n-й степени и докажем его существование и единственность у любого неотрицательного действительного числа.

Определение 1. Для любого числа $a \geq 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ число $x \geq 0$ такое, что $x^n = a$, называется *арифметическим корнем n-й степени* из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$.

Теорема 1. *У любого неотрицательного числа существует, и только один арифметический корень n-й степени. Причем, если $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, т.е. арифметический корень n-й степени обладает свойством монотонности.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. Предположим, что есть число $a \geq 0$, у которого два арифметических корня n-й степени x_1 и x_2, причем, например, $x_1 < x_2$. Тогда $x_1^n < x_2^n$, что противоречит тому, что $x_1^n = a = x_2^n$. Следовательно, наше предположение неверное. Аналогично доказывается и свойство монотонности.

Теперь докажем существование корня n-й степени из $a \geq 0$. Сначала найдем целое $\beta_0 \geq 0$ такое, что $\beta_0^n \leq a < (\beta_0 + 1)^n$, затем цифру β_1 такую, что

$$(\beta_0,\beta_1)^n \leq a < (\beta_0,\beta_1 + 10^{-1})^n$$

и т.д. По индукции построим число $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$, удовлетворяющее неравенствам:

$$(\underline{(b)_k})^n \leq a < (\overline{(b)_k})^n \quad \forall k.$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем, что $a = b^n$, т.е. b — корень n-й степени из a. Теорема 1 доказана.

Определение 2 Для любого действительного числа $a > 0$ и любого рационального числа $r = p/n$, где p целое, а n натуральное, число $(\sqrt[n]{a})^p$ называется *степенью числа a с показателем r* и обозначается a^r.

Очевидно, что неотрицательное число $(\sqrt[n]{a})^p$ является корнем n-й степени из a^p, и поэтому, если $r = p/n$, то

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}.$$

Теорема 2. *Пусть a и b — положительные действительные числа, а x и y — произвольные рациональные числа. Тогда:*

1. $(ab)^x = a^x b^x$;
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
3. $(a^x)^y = a^{xy}$;
4. *если* $a > 1$ *и* $x < y$, *то* $a^x < a^y$;
   если $a < 1$ *и* $x < y$, *то* $a^x > a^y$;
5. *если* $a < b$ *и* $x > 0$, *то* $a^x < b^x$;
   если $a < b$ *и* $x < 0$, *то* $a^x > b^x$.

Доказательство. Пусть $x = \dfrac{p}{n}$. Тогда из свойств степеней с целыми показателями следует, что числа $(ab)^x$ и $a^x b^x$ - это корни n-й степени из $a^p b^q$, и поэтому равны.

Пусть, кроме того, $y = \dfrac{q}{m}$. Тогда, очевидно, числа a^{x+y} и $a^x \cdot a^y$ — это корни mn-й степени из a^{mp+nq} и поэтому они равны. Аналогично доказывается и свойство 3.

Если $a > 1$, $x < y$, $x = \dfrac{p}{n}$, $y = \dfrac{q}{m}$, то $mp < nq$ и $a^{mp} < a^{nq}$. А так как a^x и a^y — это корни mn-й степени из a^{mp} и a^{nq}, соответственно, то, в силу свойства монотонности корня, $a^x < a^y$. Аналогично доказываются и другие свойства степеней с рациональными показателями. Теорема 2 доказана.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$.

Решение. Если $a > 1$, то и $\sqrt[n]{a} > 1$. Положим $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$ и оценим α_n с помощью неравенства Бернулли:

$$a = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n, \quad \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1$. Если же $0 < a < 1$, то $b = 1/a > 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1/\sqrt[n]{b}) = 1$.

5.2. Степени с действительными показателями. Из свойств степеней с рациональными показателями следует, что для любого действительного числа x и любого $a > 0$ последовательность $\{a^{\frac{(x)_n}{}}\}$ ограниченная и монотонная: она монотонно возрастает, если $a \geq 1$, и монотонно убывает, если $0 < a \leq 1$. Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого $a > 0$ эта последовательность имеет конечный предел.

Определение. Для любого действительного числа x и любого $a > 0$ предел последовательности $\{a^{\frac{(x)_n}{}}\}$ называется *степенью числа a с показателем x* и обозначается a^x.

Для любого $x > 0$ положим $0^x = 0$.

Таким образом, по определению,

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{\underline{(x)}_n}.$$

Рассмотрим еще последовательность $\{a^{\overline{(x)}_n}\}$. Она всегда ограниченная и монотонная: монотонно убывает, если $a \geq 1$, и монотонно возрастает, если $0 < a \leq 1$. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} a^{\overline{(x)}_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\underline{(x)}_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[10^n]{a} = a^x,$$

так как последний предел равен 1 (см. пример из п.5.1). Следовательно, если $a > 1$, то

$$a^{\underline{(x)}_n} \leq a^x \leq a^{\overline{(x)}_n} \quad \forall n,$$

а если $0 < a \leq 1$, то

$$a^{\underline{(x)}_n} \geq a^x \geq a^{\overline{(x)}_n} \quad \forall n.$$

Теорема. *Пусть a и b — положительные действительные числа, а x и y — произвольные действительные числа. Тогда:*

1. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;
2. *если* $a > 1$ *и* $x < y$, *то* $a^x < a^y$;
   если $a < 1$ *и* $x < y$, *то* $a^x > a^y$;
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
4. $(a^x)^y = a^{xy}$;
5. *если* $a < b$ *и* $x > 0$, *то* $a^x < b^x$;
   если $a < b$ *и* $x < 0$, *то* $a^x > b^x$.

Доказательство. 1. Из свойств степеней с рациональными показателями и теоремы о пределе произведения следует, что

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{\underline{(x)}_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\underline{(x)}_n} b^{\underline{(x)}_n} = a^x \cdot b^x.$$

2. Если $x < y$, то $\exists n : \overline{(x)}_n < \underline{(y)}_n$. Тогда, если $a > 1$, то для указанного n справедливы неравенства

$$a^x \leq a^{\overline{(x)}_n} < a^{\underline{(y)}_n} \leq a^y.$$

Аналогично доказывается и второе утверждение.

3. Если $a > 1$, то в силу свойства 2 имеем

$$a^{\underline{(x)}_n} a^{\underline{(y)}_n} \leq a^{x+y} \leq a^{\overline{(x)}_n} a^{\overline{(y)}_n}.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем равенство

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Случай, когда $0 < a \le 1$, рассматривается аналогично.

4. Пусть $a \ge 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Положим

$$r_n = \underline{(x)}_n \underline{(y)}_n, \qquad R_n = \overline{(x)}_n \overline{(y)}_n.$$

Очевидно, числа r_n и R_n рациональные, $r_n < R_n$ и

$$R_n - r_n = \overline{(x)}_n \cdot 10^{-n} + 10^{-n} \underline{(y)}_n \le p \cdot 10^{-n},$$

где $p = \overline{(x)}_0 + \overline{(y)}_0$. Числа a^{xy} и $(a^x)^y$ лежат между числами a^{r_n} и a^{R_n} для любого $n \in \mathbb{N}$, и поэтому

$$|a^{xy} - (a^x)^y| \le a^{R_n} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{R_n - r_n} - 1) \le a^p (a^{p \cdot 10^{-n}} - 1) \quad \forall n.$$

А так как $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[10^n]{a^p} = 1$, то $a^{xy} = (a^x)^y$.

Другие случаи рассматриваются аналогично.

5. Если $a < b$ и $x > 0$, то $a^{\underline{(x)}_n} \le b^{\underline{(x)}_n}$ $\forall n$, и поэтому $a^x \le b^x$.

Равенство невозможно, так как если $a^x = b^x$, то $(a^x)^{1/x} = (b^x)^{1/x}$, т.е. $a = b$, что противоречит условию.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема доказана.

5.3. Логарифмы. Сначала напомним определение логарифма числа по данному основанию.

Определение. Пусть $b > 0$ и $b \ne 1$. Тогда для любого числа $a > 0$ число c такое, что $b^c = a$, называется *логарифмом числа a по основанию b* и обозначается $\log_b a$.

Таким образом, по определению,

$$b^{\log_b a} = a.$$

Теорема. *Если $b > 0$ и $b \ne 1$, то у любого числа $a > 0$ существует единственный логарифм по основанию b.*

Доказательство. Из свойства 2 степеней (см. теорему 2 п. 5.2) следует, что если $b^{c_1} = b^{c_2}$, где $b > 0$ и $b \ne 1$, то $c_1 = c_2$. Следовательно, если $\log_b a$ существует, то он единственный. Докажем существование логарифма.

Пусть $b > 1$ и $a > 1$. Подбором найдем целое число $\gamma_0 \ge 0$ такое, что

$$b^{\gamma_0} \le a < b^{\gamma_0 + 1}.$$

Такое число существует, так как $b^0 = 1 < a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b^n = +\infty$. Далее найдем цифру γ_1 такую, что

$$b^{\gamma_0, \gamma_1} \le a < b^{\gamma_0, \gamma_1 + 10^{-1}}$$

и т.д. По индукции строим число $c = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2\ldots$ такое, что

$$b^{\underline{(c)}_n} \le a < b^{\overline{(c)}_n} \quad \forall n.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем равенство $a = b^c$. Следовательно, $c = \log_b a$.

Другие возможные случаи сводятся к рассмотренному. Например, если $b > 1$ и $0 < a < 1$, то, как и выше, строим число c такое, что

$$b^{\underline{(c)}_n} \le a^{-1} < b^{\overline{(c)}_n} \quad \forall n.$$

Тогда $a^{-1} = b^c$, $a = b^{-c}$, т.е. $\log_b a = -c$. Теорема доказана.

Пусть число b_1 такое, что $b_1 > 0$ и $b_1 \ne 1$. Тогда если $a > 0$, то

$$b_1^{\log_{b_1} a} = a.$$

С другой стороны, если $b > 0$ и $b \ne 1$, то $b^{\log_b b_1} = b_1$, и поэтому $b^{\log_b b_1 \log_{b_1} a} = a$, т.е. $\log_b a = \log_b b_1 \cdot \log_{b_1} a$. Отсюда получается *формула перехода к новому основанию*:

$$\log_{b_1} a = \frac{\log_b a}{\log_b b_1}.$$

В частности, $\log_{1/b} a = -\log_b a$.

Легко видеть, что все основные свойства логарифмов являются непосредственными следствиями соответствующих свойств степеней.

§ 6. Принцип вложенных отрезков, теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши

6.1. Принцип вложенных отрезков. Аналогично определению числовой последовательности можно определить последовательности элементов произвольной природы: точек на плоскости, точек в пространстве, числовых интервалов, отрезков и т.д. Например, если имеется правило, которое каждому натуральному числу n ставит в соответствие некоторый отрезок $[a_n; b_n]$, то говорят, что задана последовательность отрезков

$$[a_n; b_n], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Пара, состоящая из номера n и соответствующего ему отрезка $[a_n; b_n]$, называется *элементом последовательности* (1). Следовательно, любая последовательность отрезков имеет бесконечно много элементов.

Определение 1. Последовательность отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, называется *последовательностью вложенных отрезков*, если

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Теорема 1. *У любой последовательности вложенных отрезков действительной прямой существует хотя бы одна общая точка.*

Доказательство. Если последовательность (1) является последовательностью вложенных отрезков, т.е. для нее выполняется условие (2), то последовательность левых концов $\{a_n\}$ монотонно возрастает, а последовательность правых концов $\{b_n\}$ монотонно убывает, причем обе они ограничены. Следовательно, они имеют конечные пределы. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Тогда $a \le b$, так как $a_n \le b_n$ $\forall n$, и

$$a_n \le a \le b \le b_n \quad \forall n. \tag{3}$$

Отсюда следует, что все точки отрезка $[a;b]$ являются общими для отрезков последовательности (1). Теорема 1 доказана.

Заметим, что у последовательности вложенных интервалов может не быть ни одной общей точки. Например, последовательность интервалов $(0;1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, является вложенной, так как $(0;1/(n+1)) \subset (0;1/n)$ $\forall n$, однако у них нет ни одной общей точки. Действительно, никакое число $c \le 0$ не принадлежит ни одному интервалу $(0;1/n)$. Если же $c > 0$, то существует N такое, что $1/n < c$ $\forall n \ge N$, и поэтому число c не принадлежит ни одному интервалу $(0;1/n)$, у которого $n \ge N$.

Доказанная теорема называется *принципом вложенных отрезков Кантора* или *теоремой Кантора о вложенных отрезках.*

Определение 2. Последовательность вложенных отрезков называется *стягивающейся*, если последовательность длин этих отрезков сходится к нулю.

Теорема 2. *Любая последовательность стягивающихся отрезков действительной прямой имеет единственную общую точку.*

Доказательство. Пусть последовательность отрезков (1) стягивающаяся. При доказательстве теоремы 1 был построен отрезок $[a;b]$, удовлетворяющий условию (3), и поэтому все его точки принадлежат и любому отрезку $[a_n;b_n]$. Вне отрезка $[a;b]$ нет точек, которые принадлежат всем отрезкам последовательности (1). Действительно, если, например, $c < a$, то существует N такое, что $a_n > c$ $\forall n \ge N$, и поэтому точка c не принадлежит отрезкам $[a_n;b_n]$, у которых $n \ge N$. Из неравенств (3) следует, что

$$0 \le b - a \le b_n - a_n \quad \forall n.$$

А так как последовательность отрезков $[a_n;b_n]$ стягивающаяся, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $a = b$. Следовательно, данная последовательность отрезков имеет одну общую точку. Теорема 2 доказана.

Теорему 2 можно сформулировать следующим образом:

Любая последовательность стягивающихся отрезков стягивается к некоторой точке.

Это свойство множества $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *аксиомой непрерывности Кантора.*

Заметим, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не обладает свойством непрерывности в смысле Кантора. Например, если a_n и b_n — n-е десятичные приближения числа $\sqrt{2}$, то, как известно, $\{a_n\}$ монотонно возрастает, $\{b_n\}$ монотонно убывает, $a_n < \sqrt{2} < b_n$ $\forall n$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}.$$

Следовательно, последовательность отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, является стягивающейся, в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел имеет одну общую точку $\sqrt{2}$, а в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не имеет общих точек.

6.2. Теорема Больцано–Вейерштрасса. В § 2 доказано, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение является неверным. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in \in \mathbb{N}$, ограничена, но не имеет предела. Однако справедлива следующая теорема, которая называется *теоремой Больцано–Вейерштрасса.*

Теорема 1. *У любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. существуют числа a и b такие, что $a \le x_n \le b$ $\forall n$. Точкой $c_0 = (a+b)/2$ отрезок $[a; b]$ разделим на два равных по длине отрезка $[a; c_0]$ и $[c_0, b]$. Хотя бы один из них содержит значения бесконечного множества элементов последовательности $\{x_n\}$. Через $[a_1; b_1]$ обозначим отрезок $[c_0; b]$, если он содержит значения бесконечного множества элементов последовательности, в противном случае через $[a_1; b_1]$ обозначим отрезок $[a; c_0]$. Отрезок $[a_1; b_1]$ точкой $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ снова разделим на два отрезка $[a_1; c_1]$ и $[c_1; b_1]$, и через $[a_2; b_2]$ обозначим отрезок $[c_1; b_1]$, если он содержит значения бесконечного множества элементов последовательности $\{x_n\}$, и отрезок $[a_1; c_1]$ в противном случае. Таким образом, делением пополам, строится последовательность вложенных отрезков $[a_k; b_k]$, $k \in \mathbb{N}$, каждый из которых содержит значения бесконечного множества членов последовательности $\{x_n\}$, причем

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0.$$

Следовательно (см. теорему 2 из п.5.1), эти отрезки имеют одну общую точку

$$c = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом:

$$x_{n_1} \in [a_1; b_1];$$
$$x_{n_2} \in [a_2; b_2], \quad n_2 > n_1;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n_k} \in [a_k; b_k], \quad n_k > n_{k-1};$$
$$x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}; b_{k+1}], \quad n_{k+1} > n_k;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Так как $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \ \forall k$, то из теоремы о трех последовательностях следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Теорема 1 доказана.

Определение. Предел любой подпоследовательности данной последовательности называется *частичным пределом* этой последовательности.

Теперь теорему Больцано–Вейерштрасса можно сформулировать следующим образом:

Любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Определение 2. Наибольший (наименьший) частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее *верхним* (*нижним*) *пределом* и обозначается

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad (\text{соотв.}, \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n).$$

Теорема 2. *Любая ограниченная последовательность имеет как верхний, так и нижний пределы.*

Доказательство. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность, построенная при доказательстве теоремы 1. Из построения следует, что предел этой подпоследовательности является наибольшим частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, т.е.

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_k = c$, то для любого $c' > c$ существует k' такое, что $b_{k'} < c'$, а по построению в интервале $(b_{k'}; +\infty)$ могут быть значения лишь конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, никакое число $c' > c$ не может быть частичным пределом. Теорема для верхнего предела доказана.

Чтобы доказать существование нижнего предела последовательности $\{x_n\}$, нужно через $[a_k; b_k]$ обозначать тот из двух отрезков (см. доказательство теоремы 1), который содержит значения бесконечного множества элементов данной последовательности, а интервал $(-\infty; a_k)$ содержит значения лишь конечного числа ее элементов. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Любая числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел, конечный или бесконечный.*

Доказательство. Если последовательность ограничена, то см. теорему 1. Если последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной сверху, то для любого числа M существует бесконечное множество ее элементов, значения которых больше M, так как иначе эта последовательность была бы ограничена сверху.

Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом:

$$x_{n_1} > 1;$$
$$x_{n_2} > 2, \quad n_2 > n_1;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_{n_k} > k, \quad n_k > n_{k-1};$$
$$\dots\dots\dots$$

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Если последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной снизу, то аналогичным образом строится подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, у которой $x_{n_k} < -k \ \forall k$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$. Теорема 3 доказана.

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной сверху, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$. Если же она является неограниченной снизу, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$.*

Очевидно, верны и обратные утверждения. Сделаем еще одно полезное замечание.

Из теоремы 4 п.2.2 следует, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Верно и обратное утверждение:

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = x_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Действительно, так как точка x_0 является единственным частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, то вне любой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 содержатся значения лишь конечного числа элементов этой последовательности, т.е.

$$\forall O(x_0) \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad x_n \in O(x_0),$$

а это и означает, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

6.3. Критерий Коши. В этом пункте докажем один общий критерий сходимости последовательности, в формулировке которого используются только элементы самой последовательности.

Лемма. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она удовлетворяет условию:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что если $n \geq N_\varepsilon$ и $m \geq N_\varepsilon$, то

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Условие (1) называется *условием Коши.* Последовательность, удовлетворяющая условию Коши, называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе.*

Теорема. *Если последовательность действительных чисел удовлетворяет условию Коши, то она имеет конечный предел.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то она ограничена.

В условии Коши (1) положим $\varepsilon = 1$ и $m = N_1$. Тогда $\forall n \geq N_1$ $|x_n - x_{N_1}| < 1$, т.е. $x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$. Если теперь через a и b обозначим наименьшее и наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_{N_1}, x_{N_1} - 1$, $x_{N_1} + 1$, то, очевидно, $a \leq x_n \leq b$ $\forall n$.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию Коши, ограничена. По теореме Больцано Вейерштрасса у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_\varepsilon : \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists K_\varepsilon : \quad \forall k \geq K_\varepsilon \quad |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $p = \max\{N_\varepsilon; K_\varepsilon\}$. Тогда, очевидно, $p \geq K_\varepsilon$, $n_p \geq p \geq N_\varepsilon$ и, следовательно, для любого $n \geq N_\varepsilon$

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_p}| + |x_{n_p} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А так как $\varepsilon > 0$ любое, то этим доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Теорема доказана.

Объединив доказанные лемму и теорему, получим утверждение, которое называется *критерием Коши* сходимости последовательности:

Для того чтобы последовательность действительных чисел сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

Заметим, что лемма справедлива как в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел, так и в множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Однако теорема является неверной в множестве $\mathbf{Q}$. Например, последовательность n-х нижних десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, как известно, сходится к числу $\sqrt{2}$ и, следовательно, не имеет предела в $\mathbf{Q}$, хотя и удовлетворяет условию Коши. Доказанное свойство множества $\mathbb{R}$ действительных чисел формулируют иногда таким образом:

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является полным. В этом смысле *множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является неполным.*

Пример 1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

Решение. Прежде всего докажем, что последовательность

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

не удовлетворяет условию Коши, т.е. удовлетворяет противоположному условию:

$$\exists\varepsilon>0: \quad \forall N \quad \exists n\geq N, \quad \exists m\geq N: \quad |x_n-x_m|\geq\varepsilon. \tag{3}$$

Для любого n имеем:

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для последовательности (2) условие (3) выполняется при $\varepsilon=1/2$, $N=n$, $m=2n$, и поэтому она не имеет конечного предела.

Так как последовательность (2) монотонно возрастает и, как уже доказано, не имеет конечного предела, то ее предел равен $+\infty$.

Пример 2. Исследовать, при каких α последовательность

$$x_n(\alpha)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+\alpha}}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

сходится, а при каких α она расходится.

Решение. При $\alpha = 0$ последовательность (4) рассмотрена в примере 1. Там было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(0) = +\infty$, а так как

$$x_n(\alpha) \geq x_n(0) \quad \forall \alpha \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha) = +\infty$ для любого $\alpha \leq 0$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha > 0$.

Последовательность (4) монотонно возрастает, поэтому, чтобы доказать, что она имеет конечный предел, достаточно доказать, что у нее есть ограниченная подпоследовательность.

Положим $n_k = 2^k - 1$ и рассмотрим подпоследовательность

$$x_{n_k}(\alpha) = \sum_{m=1}^{2^k-1} \frac{1}{m^{1+\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$x_{n_k}(\alpha) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{m^{1+\alpha}},$$

а так как

$$\sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{m^{1+\alpha}} \leq \frac{1}{(2^{j-1})^{1+\alpha}} \cdot 2^{j-1} = \frac{1}{(2^{j-1})^{\alpha}},$$

то

$$x_{n_k}(\alpha) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2^\alpha)^{j-1}} < \frac{1}{1-2^{-\alpha}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, последовательность (4) имеет конечный предел, если $\alpha > 0$.

6.4. Точные грани числовых множеств. Пусть X — непустое множество действительных чисел.

Определение 1. Множество X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число b такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq b$ (соотв., $x \geq b$). Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Очевидно, множество X ограничено тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\exists b: \quad \forall x \in X \quad |x| \leq b.$$

Определение 2. Число b называется *верхней* (*нижней*) *границей* или *гранью множества* X, если

$$\forall x \in X \quad x \leq b \quad (\text{соотв., } x \geq b).$$

Наименьшая из верхних граней множества X называется *точной верхней гранью множества* X и обозначается $\sup X$ (читается «супремум X»), а наибольшая из нижних граней называется его *точной нижней гранью* и обозначается $\inf X$ (читается «инфимум X»).

Если множество X является неограниченным сверху (снизу), то, по определению, будем считать, что $\sup X = +\infty$ (соотв., $\inf X = -\infty$).

Таким образом, по определению, $M = \sup X$, если

1. $\forall x \in X \quad x \leq M$;
2. $\forall M' < M \quad \exists x_{M'} \in X: \quad x_{M'} > M'$.

Первое условие означает, что M — верхняя грань множества X, а второе условие утверждает, что никакое $M' < M$ не является верхней гранью для X.

Аналогично, $m = \inf X$, если

1. $\forall x \in \dot{X} \quad x > m$;
2. $\forall m' > m \quad \exists x_{m'} \in X: \quad x_{m'} < m'$.

Легко видеть, что если множество имеет *наибольший* (*наименьший*) *элемент*, то он будет точной верхней (соотв., нижней) гранью этого множества, т.е. если

$$\exists x_0 \in X: \quad \forall x \in X \quad x \leq x_0 \quad (x \geq x_0),$$

то $x_0 = \sup X$ (соотв., $x_0 = \inf X$).

Теорема 1. *Любое множество действительных чисел может иметь лишь одну точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Допустим, что существует множество X, которое имеет две разные точные верхние грани M и M'. Тогда, если $M' < M$, то, согласно условию 2 определения, M' не будет верхней гранью, а если $M < M'$, то M не является верхней гранью. Следовательно, наше допущение неверное.

Аналогично доказывается единственность $\inf X$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *У любого непустого множества действительных чисел, ограниченного сверху (снизу), существует точная верхняя (нижняя) грань, являющаяся действительным числом.*

Доказательство. Пусть множество X непустое и ограниченное сверху, т.е. существует $a \in X$ и существует b такое, что $x \leq b \ \forall x \in X$. Тогда отрезок $[a;b]$ содержит хотя бы один элемент множества X. Очевидно, если $a = b$, то $a = \sup X$.

Рассмотрим общий случай, когда $a < b$.

Отрезок $[a;b]$ разделим на два равных по длине отрезка $[a;c_0]$ и $[c_0;b]$. Если $x \leq c_0 \ \forall x \in X$, то через $[a_1;b_1]$ обозначим отрезок $[a;c_0]$, в противном случае через $[a_1;b_1]$ обозначим отрезок $[c_0;b]$. Отрезок $[a_1;b_1]$ снова разделим на два равных по длине отрезка $[a_1;c_1]$ и

$[c_1; b_1]$, и через $[a_2; b_2]$ обозначим отрезок $[a_1; c_1]$, если $x \le c_1$ $\forall x \in X$, и отрезок $[c_1; b_1]$ в противном случае. Таким образом, делением пополам, строится последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что

1. $x \le b_n$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\forall a_n \quad \exists x_n \in X: \quad x_n > a_n$.

Так как последовательность отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, является стягивающейся, то эти отрезки имеют одну общую точку

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Тогда из условия 1) следует, что $x \le c$ $\forall x \in X$, т.е. c — верхняя грань множества X. Из условия 2) следует, что c — наименьшая верхняя грань. Действительно, если $c' < c$, то $\exists n' : a_{n'} > c'$ и

$$\exists x_{n'} \in X: \quad x_{n'} > a_{n'} > c'.$$

Поэтому c' не является верхней гранью множества X. Следовательно, $c = \sup X$.

Для точной нижней грани доказательство аналогичное.

Теорема 2 доказана

Заметим, что в множестве рациональных чисел теорема, аналогичная теореме 2, является неверной. Например, множество всех положительных рациональных чисел r таких, что $r < \sqrt{2}$, не имеет точной верхней грани в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

6.5. Лемма о покрытии отрезка интервалами. Среди всех числовых промежутков отрезки обладают одним характерным свойством, связанным с покрытием отрезка совокупностью интервалов.

Определение. Совокупность интервалов называется *покрытием* данного промежутка, если любая его точка принадлежит некоторому интервалу этой совокупности.

Например, совокупность интервалов $(10^{-n} < x < 1-10^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$, является покрытием интервала $(0; 1)$, так как для любого $x \in (0; 1)$ можно указать n такое, что $10^{-n} < x < 1 - 10^{-n}$. Очевидно, эти интервалы не образуют покрытие отрезка $[0; 1]$, так как точки $x = 0$ и $x = 1$ не принадлежат ни одному из них.

Лемма. *Если некоторая совокупность интервалов является покрытием заданного отрезка, то существует конечное число интервалов этой совокупности, которые также образуют покрытие данного отрезка.*

Доказательство. Допустим, что существует отрезок $[a; b]$ и некоторая совокупность интервалов, которая является его покрытием, но никакая конечная совокупность этих интервалов не является покрытием. Очевидно, у такого отрезка $a < b$, так как отрезок из одной точки покрывается одним интервалом.

Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных по длине отрезка $[a; c_0]$ и $[c_0; b]$. Тогда, согласно допущению, по меньшей мере один из этих отрезков не покрывается никакой конечной совокупностью рассматриваемых интервалов. Через $[a_1; b_1]$ обозначим отрезок $[a; c_0]$, если он обладает этим свойством, а в противном случае положим $[a_1; b_1] = [c_0; b]$. Отрезок $[a_1; b_1]$ снова разделим на два равных по длине отрезка $[a_1; c_1]$ и $[c_1; b_1]$, и через $[a_2; b_2]$ обозначим тот из них, который не покрывается никакой конечной совокупностью рассматриваемых интервалов, и т.д. Таким образом, делением пополам, строится последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, каждый из которых не покрывается никакой конечной совокупностью рассматриваемых интервалов. Эта последовательность стягивающихся отрезков имеет единственную общую точку

$$c = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n. \tag{1}$$

Так как $a \leq c \leq b$, то, согласно условию, существует интервал $(\alpha; \beta)$ из рассматриваемой совокупности такой, что $\alpha < c < \beta$. Тогда из равенств (1) следует, что

$$\exists N : \quad \alpha < a_N < b_N < \beta,$$

и поэтому отрезок $[a_N; b_N]$ покрывается одним интервалом $(\alpha; \beta)$.

Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверное. Лемма доказана.

Доказанное утверждение обычно называют *леммой Гейне–Бореля о покрытии*.

Таким образом, любой отрезок обладает следующим свойством: из любого покрытия интервалами можно выбрать конечное покрытие. Это свойство отрезка называется *свойством компактности*.

Заметим, что в лемме Гейне–Бореля нельзя заменить совокупность интервалов на совокупность отрезков. Например, совокупность отрезков $[10^{-n}; 1 - 10^{-n}]$, $[-10^{-n}; 0]$ и $[1; 1 + 10^{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, покрывает отрезок $[0; 1]$, но никакая конечная совокупность этих отрезков не покрывает отрезок $[0; 1]$.

§ 7. Числовые множества

7.1. Операции над множествами. Конечные и бесконечные множества. В математике понятия «множество» и «элемент множества» являются первичными, т.е. они не определяются. Вместо слова «множество» часто употребляют такие слова, как «семейство», «собрание», «система», «геометрическое место точек» и т.п., в зависимости от контекста. Напомним некоторые первичные понятия и обозначения, связанные с множествами.

Если x — элемент множества X, то пишут $x \in X$; в противном случае — $x \notin X$. Множества X и Y называют *равными* и пишут

$X = Y$, если X и Y состоят из одних и тех же элементов. Для удобства вводится множество, которое не содержит никаких элементов; оно называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.

Множество A называется *частью* или *подмножеством множества* B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

По определению, $A \subset A$ и $\varnothing \subset A$ для любого множества A. Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называются *несобственными подмножествами* множества A, а все другие подмножества — *собственными подмножествами*.

Для заданных множеств A и B множество всех элементов, которые принадлежат как A, так и B, называется *пересечением множеств* A и B и обозначается $A \cap B$. Множество всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением* или *суммой множеств* A и B и обозначается $B \cup A$. Множество, состоящее из всех элементов множества B, которые не принадлежат множеству A, называется *разностью множеств* B и A и обозначается $B \setminus A$. Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется *дополнением множества* A *до множества* B. Множества A и B называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \varnothing$.

Непустое множество, у которого нет собственных подмножеств, называется *множеством, состоящим из одного элемента*. Множество, у которого любое собственное подмножество состоит из одного элемента, называется *множеством из двух элементов*. Множество, у которого каждое собственное подмножество состоит из одного или из двух элементов, называется *множеством из трех элементов*, про него говорят, что любое его собственное подмножество состоит не более чем из двух элементов. Если определено множество из n элементов, то множеством из $n+1$ элементов называется множество, у которого каждое собственное подмножество состоит не более чем из n элементов и есть подмножество из n элементов.

Слова «один», «два», «три» и т.д. обозначаются 1, 2, 3 и т.д. Элементы множества $\{1, 2, 3, \ldots\}$ называются *натуральными числами*. Множество всех натуральных чисел обозначают символом $\mathbb{N}$. Про пустое множество говорят, что оно содержит *нуль* элементов. Слово «нуль» обозначается 0.

Непустое множество называется *конечным*, если оно состоит из n элементов, где n — некоторое натуральное число. В противном случае множество называется *бесконечным*. Очевидно, что любое конечное числовое множество является ограниченным, но не всякое ограниченное множество является конечным. Например, множество $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ бесконечное, но ограниченное.

Число элементов объединения двух непересекающихся множеств из m и из n элементов называется *суммой* чисел m и n и обозначается $m + n$.

Для любых множеств A и B множество всевозможных упорядоченных пар $(a; b)$, т.е. множеств из двух элементов $a \in A$

и $b \in B$, называется *прямым произведением множеств* A и B и обозначается $A \times B$. Число элементов прямого произведения двух множеств из m и из n элементов называется *произведением* чисел m и n и обозначается mn.

7.2. Счетные и несчетные множества. Чтобы сравнить два непустых конечных множества, например, установить, чего больше — студентов в группе или стульев в аудитории, можно воспользоваться двумя способами. Можно пересчитать студентов и стулья и сравнить полученные числа, а можно попросить студентов сесть и тогда: если останутся незанятые стулья, то стульев больше, а если останутся стоящие студенты, то студентов больше.

Для сравнения бесконечных множеств первый способ не годится, для этого используют понятие взаимно однозначного соответствия.

Определение 1. Говорят, что между элементами x и y множеств X и Y установлено *взаимно однозначное соответствие*, если имеется правило, по которому каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ и каждый $y \in Y$ поставлен в соответствие единственному $x \in X$.

Например, если $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, а X — множество всех четных чисел, то формула $x_n = 2n$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $\mathbb{N}$ и X. Естественно считать, что такие множества имеют одинаковое количество элементов; про них говорят, что они равномощные.

Определение 2. Два множества называются *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Определение 3. Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется *счетным*.

Таким образом, множество X является счетным, если все его элементы можно занумеровать.

Очевидно, что любое бесконечное множество содержит счетное подмножество. В этом смысле счетные множества являются простейшими среди бесконечных множеств.

Теорема 1. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Сначала покажем, что множество положительных рациональных чисел счетно.

Любой несократимой положительной дроби $r = p/n$ поставим в соответствие число $m = p + n$. Так как $r > 0$, то $m \geq 2$. Теперь эти числа r занумеруем следующим образом: для $m = 2$ имеется одно число $r_1 = 1$, для $m = 3$ имеется два числа $r_2 = 2/1$ и $r_3 = 1/2$ и т.д. Вообще, если перенумерованы все положительные рациональные числа r с $m \leq k$ и последнее число имеет номер n_k, то будем перенумеровывать числа r с $m = k + 1$, начиная с номера $n_k + 1$. Так мы перенумеруем все положительные рациональные числа, т.е. построим последовательность $\{r_n\}$ такую, что $r_n \neq r_k$, если $n \neq k$, и любое $r > 0$ получается при некотором n.

Теперь рассмотрим множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Их расположим в последовательность следующим образом:

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots, r_n, -r_n, \ldots,$$

где $\{r_n\}$ — последовательность положительных рациональных чисел, построенная выше. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Допустим, что множество $\mathbb{R}$ счетное, т.е. что можно перенумеровать все действительные числа:

$$x_n = p_{0n}, \alpha_{1n}\alpha_{2n}\ldots\alpha_{kn}\ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, будем считать, что среди бесконечных дробей нет периодических с периодом 9.

Построим действительное число $x = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots$ следующим образом: $\alpha_1 \neq 9$ и $\alpha_1 \neq \alpha_{11}$, $\alpha_2 \neq 9$ и $\alpha_2 \neq \alpha_{22}$, $\ldots$, $\alpha_k \neq 9$ и $\alpha_k \neq \alpha_{kk}$, и т.д.

Очевидно, что $x \neq x_n$ $\forall n$. Следовательно, наше допущение неверное. Теорема 2 доказана.

7.3. Открытые и замкнутые множества. Здесь будем рассматривать только множества точек действительной прямой $\mathbb{R}$.

Определение 1. Точка x_0 множества $G \subset \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой множества* G, если у x_0 существует окрестность $O(x_0)$ такая, что $O(x_0) \subset G$.

Определение 2. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пустое множество, по определению, считается открытым.

Очевидно, множество $\mathbb{R}$ и любой интервал $(a; b)$ являются открытыми множествами, а промежутки $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$ не являются открытыми множествами. Например, у отрезка $[a; b]$ точка a не имеет окрестности, содержащейся в $[a; b]$.

Определение 3. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $G \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности точки x_0 есть хотя бы одна точка множества G, отличная от x_0.

Например, для конечного интервала $(a; b)$ любая точка отрезка $[a; b]$ является предельной.

Определение 4. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Пустое множество, по определению, считается замкнутым.

Например, множество $\mathbb{R}$ и любой отрезок $[a; b]$ являются замкнутыми множествами.

Очевидно, что объединение двух открытых множеств есть открытое множество. А так как пересечение двух интервалов, имеющих общую точку, является интервалом, то и пересечение двух открытых множеств — открытое множество. Аналогично, объединение и пересечение двух замкнутых множеств — замкнутые множества.

Предлагается доказать эти утверждения в качестве упражнения.

Любой конечный промежуток Δ с концами в точках a и b, $a < b$, является ограниченным множеством и $\inf\Delta = a$, $\sup\Delta = b$. В этом интервал $(a;b)$ и отрезок $[a;b]$ похожи, однако среди чисел отрезка $[a;b]$ есть как наименьшее, так и наибольшее, а среди чисел интервала нет ни наименьшего, ни наибольшего. Следующие теоремы показывают, что эти свойства являются характерными для открытых и замкнутых множеств действительных чисел.

Теорема 1. *Если множество X действительных чисел замкнуто и ограничено сверху* (*снизу*), *то*

$$\sup X \in X \quad (\text{соотв., } \inf X \in X),$$

т.е. среди элементов множества X есть наибольший (*соотв., наименьший*).

Доказательство. Если множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то, как известно, существует число m такое, что $m = \inf X$.

Из определения $\inf X$ следует, что в любой окрестности $(a;b)$ точки m существует хотя бы одна точка множества X. Следовательно, выполняется одно из условий: или $m \in X$, или m - предельная точка множества X. Если же множество X замкнутое, то во всех случаях $m \in X$.

Аналогично доказывается, что если множество X ограничено сверху, то $\sup X \in X$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если множество действительных чисел открыто, то среди его элементов нет ни наименьшего, ни наибольшего.*

Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что существует открытое множество X, у которого есть наибольший элемент. Пусть, например,

$$M \in X \quad \text{и} \quad x \leq M \quad \forall x \in X.$$

Тогда у точки M нет ни одной окрестности, которая принадлежала бы множеству X. Следовательно, множество X не является открытым.

Таким образом, если множество X открытое, то $M \notin X$. Аналогично доказывается, что и $\inf X \notin X$. Теорема 2 доказана.

Обобщим лемму о покрытии отрезка интервалами (см. п.6.5) на более общие множества.

Определение 5. Совокупность множеств называется *покрытием* данного множества, если каждая его точка принадлежит некоторому множеству этой совокупности.

Покрытие называется *открытым*, если все его множества открытые.

Лемма 1. *Из любого открытого покрытия ограниченного замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}$ можно выбрать конечную совокупность множеств, которые тоже образуют покрытие множества M.*

Доказательство. Допустим, что существует ограниченное замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}$ и некоторая совокупность открытых множеств, которая является его покрытием, но никакая конечная совокупность этих множеств не является покрытием. Очевидно, такое множество M содержит бесконечно много элементов.

Так как множество M ограничено, то существует отрезок $[a;b]$ такой, что $M \subset [a;b]$. Как и при доказательстве леммы в п 6 5, делением пополам строится последовательность вложенных отрезков $[a_n;b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что для любого n множество $M_n = M \cap [a_n;b_n]$ не покрывается никакой конечной совокупностью множеств данного покрытия. Пусть

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Выберем $x_n \in M_n$ и рассмотрим последовательность $\{x_n\}$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, а так как множество M замкнутое, то $c \in M$. Согласно условию существует множество G данного покрытия такое, что $c \in G$. Из того, что множество G открытое, следует, что существует интервал $(\alpha;\beta)$ такой, что $c \in (\alpha;\beta) \subset G$. Тогда существует N такое, что $\alpha < a_N < b_N < \beta$, и поэтому множество M_n покрывается одним множеством G.

Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверное. Лемма 1 доказана.

Эта лемма также называется *леммой Гейне-Бореля о покрытии.* Она утверждает, что ограниченное замкнутое множество точек действительной прямой обладает *свойством компактности* Множества, обладающие свойством компактности, называются *компактными.*

В заключение введем понятие границы множества.

Определение 6. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *граничной точкой множества* $G \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности точки x_0 имеются хотя бы одна точка множества G и хотя бы одна точка, не принадлежащая G.

Множество всех граничных точек множества G называется *границей множества* G и обозначается ∂G.

Очевидно, если множество G замкнутое, то $\partial G \subset G$, а если открытое, то ∂G не пересекается с G. Например, граница отрезка $[a;b]$ и соответствующего интервала $(a;b)$ состоит из двух точек a и b, которые принадлежат отрезку, но не принадлежат интервалу. Для произвольных множеств возможны разные случаи. Например, если X — множество рациональных точек интервала $(0;1)$, то его граница ∂X совпадает с отрезком $[0;1]$, и поэтому $X \subset \partial X$.

Легко видеть, что любая точка множества G или внутренняя, или граничная, а любая граничная точка или принадлежит G, или является предельной точкой для G.

Определение 7. Множество, которое получается из множества G присоединением к нему всех его предельных точек, называется *замыканием множества* G и обозначается $\overline{G}$.

Легко доказывается, что замыкание любого множества G есть замкнутое множество, т.е. $\overline{G} = \overline{\overline{G}}$, и что $\overline{G} = G \cup \partial G$.

(Доказать в качестве упражнения.)

Лемма 2. *Точка x_0 принадлежит замыканию множества G тогда и только тогда, когда она является пределом последовательности точек множества G.*

Доказательство. Если $x_0 \in \overline{G}$ и $x_0 \in G$, то x_0 — предел постоянной последовательности $x_n = x_0$, $n \in \mathbb{N}$. Если же $x_0 \notin G$, то в любой окрестности $O_{1/n}(x_0)$ точки x_0 есть точка $x_n \in G$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Лемма 2 доказана.

7.4. Мера множеств точек действительной прямой. Как известно, для любого отрезка $[a;b]$ число $b-a$ называется его длиной, ту же длину имеет и любой из промежутков $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;b)$. Обобщим это понятие на более широкий класс множеств точек действительной прямой. За основу примем длину полуоткрытых промежутков вида $(a;b]$.

Определение 1. Любой конечный промежуток Δ вида $(a;b]$ и любое множество, являющееся объединением конечного числа попарно непересекающихся промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ такого вида, называются *элементарными множествами*. Пустое множество тоже считается элементарным.

Легко видеть, что совокупность элементарных множеств обладает следующим свойством: объединение, пересечение и разность любых двух элементарных множеств являются элементарными множествами (Доказать в качестве упражнения.) Поэтому говорят, что совокупность элементарных множеств замкнута относительно теоретико-множественных операций, или что совокупность элементарных множеств образует *алгебру множеств*.

Определение 2. Для любого конечного промежутка $\Delta = (a;b]$ число $b-a$ называется его *мерой* и обозначается $m\Delta$. Если множество S элементарное и

$$S = \bigcup_{j=1}^{N} \Delta_j,$$

где промежутки $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ попарно не пересекаются, то *мерой множества S* называется число

$$mS = \sum_{j=1}^{N} m\Delta_j .$$

Мера пустого множества, по определению, равна нулю: $m\,\varnothing = 0$.

Лемма 1. *Для любых двух элементарных множеств s и S справедливо равенство*

$$m(s \cup S) + m(s \cap S) = ms + mS.$$

Если же s и S не пересекаются, то

$$m(s \cup S) = ms + mS.$$

Лемма 2. *Если множества s и S элементарные и $s \subset S$, то*

$$m(S \backslash s) = mS - ms.$$

Эти утверждения почти очевидные. Доказать их в качестве упражнения.

Теперь для любого ограниченного множества G рассмотрим числа

$$\underline{m}G = \sup_{s \subset G} ms, \qquad \overline{m}G = \inf_{S \supset G} mS,$$

где sup берется по всем элементарным множествам $s \subset G$, а inf — по всем элементарным множествам $S \supset G$.

Очевидно, у любого ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}$ числа $\underline{m}G$ и $\overline{m}G$ существуют и $\underline{m}G \le \overline{m}G$.

Определение 3. Если $\underline{m}G = \overline{m}G$, то это число называется *мерой Жордана множества G* и обозначается mG, а множество G называется *измеримым по Жордану.*

Таким образом,

$$mG = \sup_{s \subset G} ms = \inf_{S \supset G} mS.$$

Из данного определения следует, что любой отрезок $[a;b]$ измерим и его мера равна $b-a$. Действительно, так как

$$(a;b] \subset [a;b] \subset \left(a - \frac{1}{n}; b\right] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то

$$b - a \le \underline{m}[a;b] \le \overline{m}[a;b] \le b - a + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и поэтому $m[a;b] = b - a$. Аналогично доказывается, что $m[a;b) = m(a;b) = b - a$.

Теорема 1. *Если множества G_1 и G_2 измеримы, то множества $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$ тоже измеримы и*

$$m(G_1 \cup G_2) + m(G_1 \cap G_2) = mG_1 + mG_2. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть s_1, S_1, s_2, S_2 — произвольные элементарные множества, удовлетворяющие условиям: $s_1 \subset G_1 \subset S_1$, и $s_2 \subset G_2 \subset S_2$. Тогда, очевидно,

$$s_1 \cup s_2 \subset G_1 \cup G_2 \subset S_1 \cup S_2,$$
$$s_1 \cap s_2 \subset G_1 \cap G_2 \subset S_1 \cap S_2,$$

и поэтому

$$m(s_1 \cup s_2) \leq \underline{m}(G_1 \cup G_2) \leq \overline{m}(G_1 \cup G_2) \leq m(S_1 \cup S_2),$$
$$m(s_1 \cap s_2) \leq \underline{m}(G_1 \cap G_2) \leq \overline{m}(G_1 \cap G_1) \leq m(S_1 \cap S_2).$$

Сложив эти неравенства и применив лемму 1, получим неравенства

$$ms_1 + ms_2 \leq \underline{m}(G_1 \cup G_2) + \underline{m}(G_1 \cap G_2) \leq$$
$$\leq \overline{m}(G_1 \cup G_2) + \overline{m}(G_1 \cap G_2) \leq mS_1 + mS_2.$$

Отсюда и из измеримости множеств G_1 и G_2 следует, что

$$mG_1 + mG_2 \leq \underline{m}(G_1 \cup G_2) + \underline{m}(G_1 \cap G_2) \leq$$
$$\leq \overline{m}(G_1 \cup G_2) + \overline{m}(G_1 \cap G_2) \leq mG_1 + mG_2$$

Следовательно,

$$\underline{m}(G_1 \cup G_2) = \overline{m}(G_1 \cup G_2),$$
$$\underline{m}(G_1 \cap G_2) = \overline{m}(G_1 \cap G_2),$$

т.е. множества $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$ измеримы. Кроме того, справедливо равенство (1). Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если измеримые множества G_1 и G_2 не пересекаются, то*

$$m(G_1 \cup G_2) = mG_1 + mG_2.$$

Теорема 2. *Если множества g и G измеримы и $g \subset G$, то множество $G \backslash g$ тоже измеримо и*

$$m(G \backslash g) = mG - mg. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть s, S, s', S' — произвольные элементарные множества, удовлетворяющие условиям: $s \subset G \subset S$, $s' \subset g \subset S'$. Тогда

$$s \backslash S' \subset G \backslash g \subset S \backslash s'.$$

Очевидно,

$$m(S \backslash s') = mS - ms',$$

$$m(s \backslash S') = ms - m(S' \cap s) \geq ms - mS',$$

поэтому

$$ms - mS' \leq \underline{m}(G \backslash g) \leq \overline{m}(G \backslash g) < mS - ms'.$$

Отсюда и из измеримости множеств g и G следует, что

$$mG - mg \leq \underline{m}(G\backslash g) \leq \overline{m}(G\backslash g) \leq mG - mg.$$

Следовательно, множество $G\backslash g$ измеримо и справедлива формула (2). Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 следует, что *совокупность измеримых по Жордану множеств является алгеброй множеств.*

В заключение докажем *критерий измеримости* ограниченных множеств.

Теорема 3. *Для того чтобы ограниченное множество $G \subset \mathbb{R}$ было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы его граница ∂G была измерима и $m\,\partial G = 0$.*

Доказательство. Если множество G измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют элементарные множества s_ε и S_ε такие, что

$$s_\varepsilon \subset G \subset S_\varepsilon, \qquad mS_\varepsilon - ms_\varepsilon < \varepsilon.$$

Тогда, если $\overline{S}_\varepsilon$ — замыкание множества S_ε, а $s^* = s_\varepsilon\backslash\partial s_\varepsilon$ — множество внутренних точек множества s_ε, то $\partial G \subset \overline{S}_\varepsilon\backslash s^*_\varepsilon$, и поэтому

$$\overline{m}\,\partial G \leq mS_\varepsilon - ms_\varepsilon < \varepsilon.$$

Следовательно, множество ∂G измеримо и $m\,\partial G = 0$.

Наоборот, если $m\,\partial G = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество σ_ε такое, что $\partial G \subset \sigma_\varepsilon$ и $m\,\sigma_\varepsilon < \varepsilon$. Положим

$$S_\varepsilon = G \cup \sigma_\varepsilon \quad \text{и} \quad s_\varepsilon = S_\varepsilon\backslash\sigma_\varepsilon.$$

Тогда множества s_ε и S_ε элементарные и

$$s_\varepsilon \subset G \subset S_\varepsilon, \qquad m\,s_\varepsilon \leq \underline{m}G \leq \overline{m}G \leq mS_\varepsilon,$$

$$0 \leq \overline{m}G - \underline{m}G \leq m\,S_\varepsilon - m\,s_\varepsilon = m\sigma_\varepsilon < \varepsilon.$$

Следовательно, $\overline{m}G = \underline{m}G$, т.е. множество G измеримо.

Теорема 3 доказана.

Согласно этому критерию измеримости, множество G всех рациональных точек отрезка $[0;1]$ не будет измеримым по Жордану, так как $\partial G = [0;1]$ и $m\,\partial G = 1$.

Глава 2. Функции одной переменной

§ 1. Примеры числовых функций

1.1. Определение числовой функции. Числовые функции изучались еще в школьном курсе математики. Напомним соответствующие определения и понятия.

Определение 1. Пусть заданы множество $X \subset \mathbb{R}$ и некоторое правило f, которое каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие некоторое число $y = f(x)$. Тогда множество всевозможных пар $(x; f(x))$, $x \in X$, называется *числовой функцией* и обозначается либо просто f, либо $f(x)$, $x \in X$, либо $y = f(x)$, $x \in X$.

Множество X называется *областью определения функции* f и иногда обозначается D_f, а множество всех $y = f(x)$, $x \in X$, называется *множеством значений функции* f и обозначается $f(X)$.

Множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, $x \in X$, называется *графиком функции* f.

В силу данного определения, если меняется область определения функции, то меняется и функция, например, функции $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, и $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{N}$, являются разными: первая —это квадратичная функция, а вторая — последовательность $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любой функции $f(x)$, $x \in X$, функция, которая порождается тем же правилом соответствия f, но определяется только на некотором множестве $D \subset X$, называется *сужением функции* f на множество D. Таким образом, последовательность $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, является сужением квадратичной функции на множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Если задана функция $y = f(x)$, $x \in X$, то говорят, что *переменная* y является функцией *независимой переменной* x, и часто пишут $y = y(x)$ (чтобы не вводить лишних обозначений).

Числовую функцию f, определенную на множестве X, иногда называют *отображением множества* X на множество $f(X)$ (или в множество $\mathbb{R}$). Тогда $y = f(x)$ называется *образом* точки x, а x — *прообразом* точки y. Если $M \subset X$, то множество всех $y = f(x)$, когда $x \in M$, называется *образом множества* M при отображении f и обозначается $f(M)$.

Часто числовую функцию задают просто формулой, не указывая ее область определения. В этом случае под областью определения функции понимают так называемую *естественную область* определения, т.е. множество всех чисел, для которых заданная формула имеет смысл. Например, естественной областью определения функции, заданной формулой $y = \sqrt{1 - x^2}$, является отрезок $[-1; 1]$, а функции, заданной формулой $y = (x^2 - 1)^{-1/2}$ — объединение двух интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.

Определение 2. Функция f называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* X, если она определена на X и для любых x_1 и x_2 из множества X выполняется условие: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) \le f(x_2)$ (соотв., $f(x_1) \ge f(x_2)$).

Функция называется *монотонной на множестве* X, если она монотонно возрастающая или монотонно убывающая на X.

Например, функция $y = x^2$ монотонно убывающая на промежутке $(-\infty; 0]$ и монотонно возрастающая на промежутке $[0; +\infty)$. На всей области определения, т.е. на действительной прямой $\mathbb{R}$, она не является монотонной.

Функция называется просто *монотонной* (без указания множества), если она монотонная (монотонно возрастающая или монотонно убывающая) на всей области определения. Например, функция $y = x^3$ монотонно возрастающая.

Определение 3. Функция f называется *строго возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* X, если она определена на X и для любых x_1 и x_2 из множества X выполняется условие: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ (соотв., $f(x_1) > f(x_2)$).

Функция называется *строго монотонной на множестве* X, если она строго возрастающая или строго убывающая на X.

Функция называется *строго монотонной*, если она строго монотонная на всей области определения.

Например, функция $y = x^2$ строго убывающая на $(-\infty; 0]$ и строго возрастающая на $[0; +\infty)$, а функция $y = x^3$ строго возрастающая.

Определение 4. Функция f называется *ограниченной сверху* (*снизу*) *на множестве* X, если она определена на X и множество $f(X)$ ограничено сверху (снизу), т.е. существует число M такое, что

$$\forall x \in X \quad f(x) \leq M \quad (\text{соотв., } f(x) \geq M).$$

Функция f называется *ограниченной на множестве* X, если она на X ограничена и сверху, и снизу.

Очевидно, это определение равносильно следующему: функция f называется *ограниченной на множестве* X, если она определена на X и если существует M такое, что

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq M.$$

Функция f называется *ограниченной* (без указания множества), если она ограничена на всей области определения.

Например, функция $y = x^2$ является ограниченной снизу, но не является ограниченной сверху. Однако на любом конечном промежутке она является ограниченной. Функция $f(x) = 1/(1 + x^2)$ является ограниченной, так как $0 < f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1.2. Обратные функции. Сложные функции. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in X$, и пусть $Y = f(X)$. Тогда, по самому определению функции, каждое $y \in Y$ поставлено в соответствие некоторому $x \in X$, т.е. для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение относительно x.

Определение 1. Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется *обратимой*, если для любого $y \in Y = f(X)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение $x = \varphi(y)$. Тогда функция $x = \varphi(y)$, $y \in Y$, называется *обратной к функции* f и обозначается f^{-1}.

Заметим, что функция f может быть необратимой, однако ее сужение на некоторое множество A является обратимым. В этом случае говорят, что функция f *обратима* (или *имеет обратную*) на множестве A.

Например, функция $y = x^2$ является необратимой (на естественной области определения), однако она имеет обратную как на промежутке $(-\infty; 0]$, так и на промежутке $[0; +\infty)$. Они задаются формулами $x = -\sqrt{y}$ и $x = \sqrt{y}$.

Теорема: *Любая строго монотонная функция обратима. Причем, если данная функция строго возрастающая* (*убывающая*), *то и обратная функция строго возрастающая* (*убывающая*).

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X$, строго возрастающая, и пусть $Y = f(X)$. Допустим, что для некоторого $y_0 \in Y$ уравнение $f(x) = y_0$ имеет два решения x_1 и x_2. Тогда, если, например, $x_1 < x_2$, то и $f(x_1) < f(x_2)$, что противоречит условию $f(x_1) = y_0 = f(x_2)$. Следовательно, для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение, и поэтому данная функция имеет обратную $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

Пусть теперь $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$ и $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Тогда, если $y_1 < y_2$, то $x_1 < x_2$, так как из неравенства $x_1 \geq x_2$ следует неравенство $y_1 \geq y_2$. Следовательно, обратная функция строго возрастающая.

Аналогично доказывается, что строго убывающая функция имеет строго убывающую обратную. Теорема доказана.

Определение 2. Функция, которая задается формулой $y = g(f(x))$, где f и g — данные функции, называется *сложной функцией* или *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g.

Под областью определения сложной функции $y = g(f(x))$ понимается ее естественная область определения, т.е. множество всех $x \in D_f$ таких, что $f(x) \in D_g$, где D_f и D_g — области определения функций f и g. В частности, областью определения функции $y = g(f(x))$ может быть пустое множество, тогда говорят, что эта композиция не имеет смысла.

При написании формулы сложной функции $y = g(f(x))$ независимую переменную функции g и зависимую переменную функции f, для наглядности, обозначают одной буквой, например, $y = g(u)$ и $u = f(x)$.

Пример. Пусть заданы функции $f(x) = 1 - x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$. Тогда сложная функция $y = g(f(x))$ задается формулой $y = \sqrt{u}$, где $u = 1 - x^2$, т.е. $y = \sqrt{1 - x^2}$. А сложная функция $y = f(g(x))$ задается формулой $y = 1 - x^2$, где $x = \sqrt{x}$, т.е. $y = 1 - x$, причем здесь $x \geq 0$.

Если функция $y = f(x)$ обратимая, то из определения обратной функции следует, что

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D_f.$$

Заметим, что понятие сложной функции определяет не сложность рассматриваемой функции, а только способ задания этой функции (как композиции заданных функций). Например, степенная функция $y = x^\alpha$, $x \in (0;+\infty)$, может быть задана как сложная функция $y = e^{\alpha \ln x}$, образованная из функций $u = \ln x$, $v = \alpha u$ и $y = e^v$.

1.3. Показательная и логарифмическая функции. Пусть задано положительное число $c \neq 1$. Тогда функция, заданная формулой $y = c^x$, называется *показательной*, а функция $y = \log_c x$ называется *логарифмической*.

Из определения степени с действительным показателем и логарифма числа следует, что показательная функция определена на всей действительной прямой, т.е. на $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$, а логарифмическая функция определена на интервале $(0;+\infty)$. Показательная и логарифмическая функции с одним и тем же основанием являются взаимно обратными, и поэтому показательная функция с любым основанием $c > 0$, $c \neq 1$, принимает любое значение из интервала $(0;+\infty)$, а логарифмическая функция — любое значение из $\mathbb{R}$.

Из свойств степеней следует, что показательная функция при $c > 1$ строго возрастает, а при $c < 1$ строго убывает на $\mathbb{R}$. Аналогично, логарифмическая функция при $c > 1$ строго возрастает, а при $c < 1$ строго убывает на $(0;+\infty)$.

Показательная функция является ограниченной снизу и неограниченной сверху. Причем, при $c > 1$ она ограничена на любом промежутке вида $(-\infty;a]$, а при $c < 1$ — на любом промежутке вида $[a;+\infty)$.

Логарифмическая функция не является ограниченной ни снизу, ни сверху. Она ограничена на любом конечном промежутке.

Показательная функция $y = e^x$, основанием которой является число e, называется *экспоненциальной функцией* или *экспонентной* и иногда обозначается $y = \exp x$. Так как $e > 1$, то экспоненциальная функция строго возрастающая.

1.4. Степенная функция. Пусть задано некоторое число $\alpha \neq 0$. Тогда функция, заданная формулой $y = x^\alpha$, называется *степенной функцией с показателем* α.

Из определения степени следует, что степенная функция с любым показателем α заведомо определена на интервале $(0;+\infty)$. Если $\alpha > 0$, то она определена и при $x = 0$.

Степенная функция с показателем $\alpha > 0$ строго возрастает на промежутке $[0;+\infty)$, имеет обратную $y = x^{1/\alpha}$ и принимает любое значение $y \geq 0$. Степенная функция с показателем $\alpha < 0$ строго убывает на интервале $(0; +\infty)$, имеет обратную $y = x^{1/\alpha}$ и принимает любое значение $y > 0$.

Степенная функция с натуральным показателем $\alpha = n$, где $n \in \mathbb{N}$, определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Если n нечетное, то она строго возрастает на $\mathbb{R}$, имеет обратную и принимает любое значение из $\mathbb{R}$, т.е. отображает $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Если n четное, то она строго убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, а на $[0; +\infty)$ строго возрастает, и отображает $\mathbb{R}$ на $[0; +\infty)$.

Степенная функция с целым показателем $\alpha = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, кроме точки $x = 0$. Если n нечетное, то она строго убывает на интервале $(-\infty; 0)$ и на интервале $(0; +\infty)$. Она принимает любое значение $y \neq 0$.

Аналогичные замечания можно сделать и относительно степенной функции с рациональным показателем $\alpha = 1/n$ или $\alpha = -1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Иногда удобно рассматривать степенную функцию с показателем $\alpha = 0$, считая, что она определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, кроме, может быть, точки $x = 0$, и $x^0 = 1$ для любого x из области определения.

1.5. Тригонометрические функции. Напомним, что длина дуги окружности определяется с помощью длин ломаных, вписанных в эту дугу.

Определение 1. Для любой дуги $\breve{AM}$ окружности число, равное точной верхней грани множества длин всех ломаных, вписанных в $\breve{AM}$, называется *длиной дуги* $\breve{AM}$ и обозначается $|\breve{AM}|$.

Очевидно, множество длин ломанных, вписанных в $\breve{AM}$, ограничено, и поэтому любая дуга окружности имеет длину. Легко доказать, что если $M \in \breve{AB}$, где $\breve{AB}$ — дуга окружности, то

$$|\breve{AB}| = |\breve{AM}| + |\breve{MB}|.$$

Это утверждение в общем случае будет доказано ниже, а для окружности предлагается доказать его в качестве упражнения.

Определение 2. Число, равное длине половины окружности единичного радиуса, называется *числом* π.

В качестве упражнения доказать, что $3 < \pi < 4$.

Пусть на единичной окружности C фиксирована некоторая точка A. Тогда каждой точке $M \in C$ можно поставить в соответствие две дуги $\breve{AM}$ и $\breve{MA}$: $\breve{AM}$ откладывается от точки A против часовой стрелки, а $\breve{MA}$ — по часовой стрелке. Каждому числу $\alpha \in [0; 2\pi)$ поставим в соответствие дугу $\breve{AM}_\alpha$, длина которой равна

α, а каждому $\alpha \subset (-2\pi;0)$ — дугу $\breve{M_\alpha A}$ длины α. Следовательно, каждому числу $\alpha \in (-2\pi;2\pi)$ ставится в соответствие точка $M_\alpha \in C$. Если же $|\alpha| \geq 2\pi$ и $\alpha = \alpha_0 + 2n\pi$, где $\alpha_0 \in (-2\pi;2\pi)$ и n — целое, то этому α поставим в соответствие точку M_α, которая совпадает с M_{α_0}. Таким образом, каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие точка $M_\alpha \in C$.

На плоскости, в которой лежит единичная окружность C, введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с центром окружности C, а точка A имела координаты $(1;0)$. Пусть x_α, y_α — координаты точки $M_\alpha \in C$ в этой системе координат.

Определение 3. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ число x_α называется *косинусом* α и обозначается $\cos\alpha$, а число y_α — *синусом* α и обозначается $\sin\alpha$.

Лемма 1. *Для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad |\sin\alpha| \leq |\alpha|$.

Доказательство. Так как $|\sin\alpha| \leq 1$ и $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то достаточно рассмотреть лишь $\alpha \in (0;\pi/2)$. Для таких α имеем:

$$\sin\alpha = y_\alpha < \sqrt{y_\alpha^2 + (1-x_\alpha)^2} = |AM_\alpha| < |\breve{AM}_\alpha| = \alpha.$$

Лемма 1 доказана.

Определение 4. Если $\cos\alpha \neq 0$, то число $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ называется *тангенсом* α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$. Если же $\sin\alpha \neq 0$, то число $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ называется *котангенсом* α и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$.

Лемма 2. *Для любого* $\alpha \in (-\pi/2;\pi/2)$ $\quad |\operatorname{tg}\alpha| \geq |\alpha|$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь $\alpha \in (0;\pi/2)$. Пусть M_α — точка окружности C такая, что $|\breve{AM}_\alpha| = \alpha$, а T_α — точка пересечения луча OM_α с прямой AN, перпендикулярной к оси OA. Тогда легко видеть, что $|AT_\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$ и для любой ломаной l, вписанной в дугу $\breve{AM}_\alpha$, справедливо неравенство $|l| < |AT_\alpha|$. Следовательно, $\alpha \leq \operatorname{tg}\alpha$.

Лемма 2 доказана.

Следствие. *Если* $\alpha \in (-\pi/2;\pi/2)$ *и* $\alpha \neq 0$, *то* $\cos\alpha \leq \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1$.

Определение 5. Функции, заданные формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg}x$ и $y = \operatorname{ctg}x$ и определенные на естественных областях определения, называются *тригонометрическими функциями*, соответственно *синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом*.

Из определения синуса и косинуса числа следует, что функция $y = \sin x$ строго возрастает на отрезке $[-\pi/2;\pi/2]$, а функция $y = \cos x$ строго убывает на отрезке $[0;\pi]$, причем они принимают значения из отрезка $[-1;1]$. Отсюда следует, что функция $y = \operatorname{tg}x$

строго возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ строго убывает на интервале $(0; \pi)$. Далее будет доказано, что $\sin x$ и $\cos x$ принимают любое значение $y \in [-1; 1]$, а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — любое значение $y \in \mathbb{R}$.

Определение 6. Функции, обратные к функциям

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \qquad y = \cos x, \quad x \in [0; \pi];$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \qquad y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0; \pi),$$

называются *обратными тригонометрическими функциями* и обозначаются соответственно $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1; 1]$, строго возрастает и принимает любое значение $y \in [-\pi/2; \pi/2]$. Функция $y = \arccos x$ определена на отрезке $[-1; 1]$, строго убывает и принимает любое значение $y \in [0; \pi]$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$; определена на $\mathbb{R}$, строго возрастает и принимает любое значение $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Наконец, функция $y = \operatorname{arcctg} \alpha$; определена на $\mathbb{R}$, строго убывает и принимает любое значение $y \in (0; \pi)$.

1.6. Элементарные функции. Напомним, функция, заданная на $\mathbb{R}$ формулой $y = c$, где c — некоторое число, называется *постоянной*.

Постоянная, показательная, степенная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции называются *основными элементарными функциями*.

Определение. Любая функция, которая получается из основных элементарных функций при помощи конечного числа композиций и арифметических операций называется *элементарной*.

Рассмотрим основные классы элементарных функций.

1. *Многочлены* (*полиномы*). Многочленами называются функции, которые могут быть заданы формулами вида

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

   где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа (коэффициенты многочлена). Если $a_n \neq 0$, то число n называется *степенью многочлена* (1). Многочлен первой степени — это линейная функция, а многочлен нулевой степени — это постоянная. Многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю, называется нулевым; он не имеет степени. Многочлены называются еще *целыми рациональными функциями*.

2. *Рациональные функции*. Рациональными функциями называются функции, которые могут быть заданы формулами вида $y = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x) \not\equiv 0$. Такие функции иногда называют *дробными рациональными функциями*.

3. *Иррациональные функции* — это функции, не являющиеся рациональными, которые могут быть заданы с помощью конечного числа композиций рациональных и степенных функций с рациональными показателями и арифметических операций.
4. *Трансцендентные функции* — это элементарные функции, которые не являются ни рациональными, ни иррациональными.

Доказано, что показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции являются трансцендентными функциями.

§ 2. Пределы функций

2.1. Определение предела функции по Гейне. Напомним, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности существует хотя бы одна точка из X, отличная от x_0. По аналогии с этим, если множество X является неограниченным сверху, то бесконечно удаленная точка $+\infty$ тоже называется предельной точкой множества X, так как в этом случае в любой окрестности этой точки существует точка множества X. Если же X не ограничено снизу, то точка $-\infty$ также называется предельной точкой множества X.

Определение 1. Пусть c — число или бесконечно удаленная точка действительной прямой $\mathbb{R}$, а x_0 — конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$. Тогда c называется *пределом функции* $f(x)$, $x \in X$, при $x \to x_0$ (или *в точке* x_0), если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что

$$\forall n \quad x_n \in X, \quad x_n \neq x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

последовательность $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к c, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$. В этом случае будем писать $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, или «$f(x) \to c$ при $x \to x_0$».

Чтобы не было разночтений, в тех случаях, когда функция $f(x)$, $x \in X$, является сужением некоторой другой функции, будем говорить, что c является *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ *по множеству* X, и писать «$f(x) \to c$ при $x \to x_0$, $x \in X$». Например, $\sin x\pi \to 0$ при $x \to +\infty$, $x \in \mathbb{N}$.

Заметим, что в определении предела функции f в точке x_0 не требуется, чтобы функция f была определена в точке x_0.

Очевидно, функция не может иметь двух разных пределов в точке, так как иначе существовала бы последовательность, имеющая два разных предела, что невозможно.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \subset \mathbb{R}$.

Действительно, для любого x_n имеем:

$$\cos x_n - \cos x_0 = 2\sin\frac{x_n - x_0}{2}\sin\frac{x_n + x_0}{2}.$$

А так как $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\sin\alpha| \le |\alpha|$ (см. лемму 1 из п. 1.5), то

$$|\cos x_n - \cos x_0| \le |x_n - x_0|.$$

Поэтому, если $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то и $\cos x_n \to \cos x_0$ при $n \to \infty$, что и доказывает наше утверждение.

Пример 2. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Действительно, последовательность

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится к 0 и $x_n \ne 0$ $\forall n$, но последовательность $f(x_n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, не имеет предела.

Пример 3. Функция $f(x) = \cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Действительно, последовательность $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, однако последовательность $f(x_n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, не имеет предела.

Пример 4

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{1}$$

Решение. Прежде всего, пользуясь определением числа e, докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \tag{2}$$

для любой последовательности n_k такой, что

$$\forall k \quad n_k \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty.$$

(Заметим, что здесь n_k может не быть подпоследовательностью последовательности n.)

Возьмем некоторую окрестность $(a;b)$ числа e. Тогда существует N такое, что

$$\forall n \ge N \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in (a;b),$$

а так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то для этого N существует K такое, что

$$\forall k \ge K \quad n_k > N.$$

Следовательно,

$$\forall k \geq K \quad \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \in (a;b),$$

что и доказывает равенство (2).

Пусть теперь x_k — произвольная последовательность, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_k > 1$.

Положим $n_k = [x_k]$, где $[x_k]$ — целая часть числа x_k. Тогда $n_k \leq x_k < n_k + 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$ и

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \leq \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \leq \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

А так как это равенство справедливо для любой последовательности $\{x_k\}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, то равенство (1) доказано.

Заметим, что если у функции f существуют пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ и эти пределы равны, например, A, то пишут «$f(x) \to A$ при $x \to \infty$» или

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, где x_0 — какая-то предельная точка множества D_f, если $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Аналогично этому, функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

2.2. Определение предела функции по Коши. Дадим еще одно определение функции, эквивалентное определению из п. 2.1.

Определение 1. Пусть c — число или бесконечно удаленная точка действительной прямой $\mathbb{R}$, а x_0 — конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$. Тогда c называется *пределом функции* $f(x)$, $x \in X$, *при* $x \to x_0$ (или в *точке* x_0), если для любой окрестности $O(c)$ точки c существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) \in O(c)$ для любого $x \in O(x_0) \cap X$, $x \neq x_0$.

Это определение называется *определением Коши предела функции.* Прежде чем доказывать эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне, докажем одно почти очевидное утверждение.

Лемма 1. *Если x_0 — предельная точка множества $M \subset \mathbb{R}$ (конечная или бесконечно удаленная); то существует последовательность точек x_n, $n \in \mathbb{N}$, множества M таких, что $x_n \neq x_0$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

Доказательство. Если x_0 — конечная предельная точка множества M, то в каждом интервале $(x_0 - 1/n; x_0 + 1/n)$, где $n \in \mathbb{N}$, существует точка множества M, отличная от x_0. Обозначим эту точку через x_n. Тогда $x_n \in M$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ и, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Если x_0 — бесконечно удаленная предельная точка множества M, например, $x_0 = +\infty$, то в каждом интервале $(n; +\infty)$, где $n \in \mathbb{N}$, существует точка множества M. Обозначим эту точку через x_n. Тогда $x_n \in M$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Аналогично рассматривается и случай, когда $x_0 = -\infty$. Лемма 1 доказана.

Теорема. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Пусть c — предел функции $f(x)$, $x \in X$, при $x \to x_0$ в смысле определения Гейне. Допустим, что c не является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в смысле определения Коши. Это означает, что существует окрестность $O(c)$ точки c такая, что в любой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 существует точка $x \neq x_0$ множества X такая, что $f(x) \notin O(c)$. Следовательно, x_0 — предельная точка множества точек $x \in X$, для которых $f(x) \notin O(c)$. Тогда, в силу леммы 1, существует последовательность точек x_n, $n \in \mathbb{N}$, множества X таких, что $x_n \neq x_0$ $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $f(x_n) \notin O(c)$. Однако такой последовательности не может быть, так как $f(x) \to c$ при $x \to x_0$ в смысле определения Гейне.

Пусть теперь $f(x) \to c$ при $x \to x_0$ в смысле определения Коши, и пусть последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмем некоторую окрестность $O(c)$ точки c. Тогда существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$\forall x \in O(x_0) \cap X, \quad x \neq x_0, \quad f(x) \in O(c),$$

а для этой окрестности существует N такое, что

$$\forall n \geq N \quad x_n \in O(x_0).$$

Поэтому $\forall n \geq N$ $f(x_n) \in O(c)$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Теорема доказана.

Для формулировки определения предела по Коши удобно пользоваться понятием проколотой окрестности.

Определение 2. Множество всех точек окрестности $O(x_0)$ точки x_0, отличных от x_0, называется *проколотой окрестностью точки* x_0 и обозначается $\overset{\circ}{O}(x_0)$.

Следовательно, если x_0 — конечная точка, и $O(x_0) = (a; b)$, то $\overset{\circ}{O}(x_0) = (a; x_0) \cup (x_0; b)$. А если x_0 — бесконечно удаленная точка, то, по определению, $\overset{\circ}{O}(x_0) = O(x_0)$.

Теперь определение предела функции по Коши можно сформулировать следующим образом: $f(x) \to c$ при $x \to x_0$, если

$$\forall O(c) \quad \exists O(x_0): \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O(c), \tag{1}$$

где D_f — область определения функции f, а x_0 — предельная точка множества D_f.

Пример 1. $\lim\limits_{x \to x_0} c^x = c^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть сначала $c > 1$. Тогда, если $(a; b)$ — окрестность точки $y_0 = c^{x_0}$ и $a > 0$, то $\log_c a < x_0 < \log_c b$, т.е. интервал $(\log_c a; \log_c b)$ — окрестность точки x_0, причем такая, что

$$\forall x \in (\log_c a; \log_c b) \quad c^x \in (a; b).$$

Если же $a \le 0$, то

$$\forall x \in (-\infty; \log_c b) \quad c^x \in (0; b) \subset (a; b).$$

Для $c > 1$ утверждение доказано. В случае, когда $0 < c < 1$, оно доказывается аналогично.

Пример 2.

$$\lim_{x \to +\infty} c^x = +\infty \quad \forall c > 1.$$

Действительно, для любого $b > 0$ имеем:

$$\forall x > \log_c b \quad c^x > b,$$

что доказывает наше утверждение.

Сделаем несколько замечаний относительно определения Коши предела функции в точке.

Лемма 2. *Если $x_0 \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$, то условие* (1) *равносильно условию:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O_\varepsilon(c). \tag{2}$$

Доказательство. Если выполняется условие (1), то, очевидно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O(x_0): \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O_\varepsilon(c).$$

Пусть $O(x_0) = (a; b)$. Положим

$$\delta = \min\{x_0 - a; b - x_0\}.$$

Тогда $O_\delta(x_0) \subset O(x_0)$, и поэтому

$$\forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O_\varepsilon(c),$$

т.е. выполняется условие (2).

Пусть теперь выполнено условие (2). Тогда если $O(c) = (A; B)$ и $\varepsilon = \min\{c - A; B - c\}$, то

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap D_f(x) \quad f(x) \in O_\varepsilon(c) \subset O(c),$$

т.е. выполняется условие (1). Лемма 2 доказана.

Из доказанной леммы следует, что определение Коши конечного предела y_0 функции $f(x)$ в конечной точке x_0 можно сформулировать следующим образом: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$, если выполняется условие (2).

В простейшем случае, когда функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, это определение часто формулируют так:

Число c называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенствам $0<|x-x_0|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-c|<\varepsilon$.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0\quad\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Действительно, так как

$$|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|,$$

то, очевидно, условие (2) выполняется при $\delta=\varepsilon$.

2.3. Свойства пределов функций. Сначала сформулируем несколько теорем, которые являются простыми следствиями аналогичных теорем для последовательностей и определения Гейне предела функции.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$, *то* $\lim|f(x)|=|c|$.

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *определены на множестве* X, *имеют пределы при* $x\to x_0$ *по множеству* X *и*

$$\varphi(x)\le\psi(x)\quad\forall x\in X,\quad x\ne x_0.$$

Тогда, если эти пределы равны, то любая функция $f(x)$, $x\in X$, *такая, что*

$$\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)\quad\forall x\in X,\quad x\ne x_0,$$

имеет предел при $x\to x_0$ *и*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x).$$

Теорема 3. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на множестве* X *и имеют пределы при* $x\to x_0$, $x\in X$. *Тогда, если существует окрестность* $O(x_0)$ *точки* x_0 *такая, что*

$$f(x)\le g(x)\quad\forall x\in X\cap\overset{\circ}{O}(x_0),$$

то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Заметим, что в теоремах 1, 2, 3 рассматриваемые пределы могут быть как конечными, так и бесконечными, равными $+\infty$ или $-\infty$, а точка x_0 — конечной или бесконечно удаленной предельной точкой рассматриваемых множеств. Аналогичное замечание относится и к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и имеют пределы при $x \to x_0$, $x \in X$. Тогда, если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x),$$

то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in X \cap \overset{\bullet}{O}(x_0).$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тогда существует число c такое, что $A < c < B$ и, следовательно, интервалы $(-\infty; c)$ и $(c; +\infty)$ являются окрестностями точек A и B. Согласно определению Коши предела функции, существуют окрестности $O'(x_0)$ и $O''(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$f(x) \in (-\infty; c) \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}'(x_0) \cap X,$$

$$g(x) \in (c; +\infty) \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}''(x_0) \cap X.$$

Если теперь положим $O(x_0) = O'(x_0) \cap O''(x_0)$, то

$$f(x) < c < g(x) \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}(x_0) \cap X.$$

Теорема 4 доказана.

Теперь сформулируем теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного, в которой точка x_0 может быть как конечной, так и бесконечно удаленной, а рассматриваемые пределы, в общем случае, могут быть только конечными.

Теорема 5. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и имеют конечные пределы при $x \to x_0$ по множеству X, то сумма, разность и произведение этих функций тоже имеют конечные пределы при $x \to x_0$ по множеству X и*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Докажем последнее утверждение. Пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Из теоремы 1 следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = |B| > 0$, и поэтому (см. теорему 4) существует $O(x_0)$ такая, что

$$|g(x)| > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0) \cap X.$$

Тогда для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in X \cap \overset{\circ}{O}(x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

что и доказывает последнее утверждение теоремы.

Другие утверждения теоремы доказать в качестве упражнения. Теорема 5 доказана.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Решение. Как известно, для любого $x \neq 0$, у которого $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, справедливы неравенства

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, то из этих неравенств в пределе при $x \to 0$ (см. теорему 2) получаем то, что требовалось доказать.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

Решение. Из теоремы 5 и из рассмотренных выше примеров следует, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 0.$

Решение. Для произвольного α функция $f(x) = x^\alpha$ определена только для $x > 0$. Поэтому для произвольного $\alpha > 0$ утверждение следует (в силу определения Коши) из того, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \varepsilon^{1/\alpha} > 0$ такое, что

$$x^\alpha \in (0; \varepsilon) \quad \forall x \in (0; \delta).$$

Если же $\alpha > 0$ такое, что степенная функция x^α определена и для $x < 0$, то она или четная, или нечетная, и поэтому

$$x^\alpha \in (-\varepsilon; \varepsilon) \quad \forall x \in (-\varepsilon^{1/\alpha}; \varepsilon^{1/\alpha}).$$

Следовательно, рассмотрены все случаи.

2.4. Односторонние пределы. При изучении функций в окрестности некоторой точки часто бывает полезным рассматривать поведение функции слева и справа от данной точки. Простейшей характеристикой такого поведения функции являются *односторонние пределы*.

Определение. Предел при $x \to x_0$ сужения функции $f(x)$ на множество $(-\infty; x_0) \cap D_f$ называется *пределом слева функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f(x_0 - 0)$, а предел ее сужения на $(x_0; +\infty) \cap D_f$ называется *пределом справа* и обозначается $f(x_0 + 0)$.

Очевидно, чтобы говорить о пределе слева (или справа) функции f в точке x_0, необходимо, чтобы точка x_0 была предельной точкой множества $(-\infty; x_0) \cap D_f$ (соотв., $(x_0; +\infty) \cap D_f$). Обычно односторонние пределы рассматриваются для функций, определенных на промежутках. Тогда, если $c = f(x_0 \pm 0)$, то пишут

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = c.$$

Например, если $[x]$ — целая часть числа x, то

$$\lim_{x \to 1-0} [x] = 0, \qquad \lim_{x \to 1+0} [x] = 1.$$

Если же $x_0 = 0$, то вместо 0 ± 0 пишут ± 0. Например,

$$\lim_{x \to -0} [x] = -1, \qquad \lim_{x \to +0} [x] = 0.$$

Очевидно, для односторонних пределов справедливы все свойства пределов, доказанные в п.2.3.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ определена и монотонна на интервале $(a; b)$; то в каждой точке $x_0 \in (a; b)$ она имеет односторонние пределы. Причем, если $f(x)$ возрастающая, то*

$$f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le f(x_0 + 0), \tag{1}$$

а если убывающая, то

$$f(x_0 - 0) \ge f(x_0) \ge f(x_0 + 0). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает. Тогда для каждого $x_0 \in (a; b)$

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in (a; x_0),$$

т.е. множество $f((a;x_0))$ ограничено сверху. Следовательно, оно имеет точную верхнюю грань, причем, если $c = \sup f((a;x_0))$, то $c \leq f(x_0)$. Докажем, что $c = f(x_0 - 0)$.

Пусть $(A;B)$ — некоторая окрестность точки c, т.е. $A < c < B$. Тогда, согласно определению точной верхней грани,

$$\exists x_A \in (a;x_0): \quad f(x_A) > A,$$

а так как $f(x)$ монотонно возрастает, то

$$\forall x \in (x_A;x_0) \quad A < f(x_A) \leq f(x) \leq c < B,$$

т.е. $f(x) \in (A;B)$ $\forall x \in (x_A;x_0)$, что и доказывает наше утверждение.

Так же доказывается, что $f(x_0+0) = \inf\limits_{x\in(x_0;b)} f(x)$. Неравенство (1) очевидное.

Случай монотонно убывающей функции рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

Заметим, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, во всех случаях имеет конечные или бесконечные пределы при $x \to a$ и при $x \to b$. Причем, если функция f ограниченная, то оба эти предела конечные, а если неограниченная, то один из них обязательно бесконечный.

В заключение сформулируем обобщение теоремы 1 на произвольные монотонные функции.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ монотонна на множестве X и x_0 — предельная точка множества $X \cap (-\infty;x_0)$, то у функции $f(x)$ в точке x_0 существует предел слева. Если же x_0 — предельная точка множества $X \cap (x_0;+\infty)$, то у $f(x)$ в x_0 существует предел справа.*

Доказать эту теорему в качестве упражнения.

2.5. Критерий Коши существования предела функции. Сначала, исходя из определения по Гейне, сформулируем и докажем один почти очевидный критерий существования конечного или бесконечного предела.

Лемма. *Пусть x_0 — предельная точка множества X. Тогда, для того чтобы функция $f(x)$, $x \in X$ имела предел при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что*

$$\forall n \quad x_n \in X, \quad x_n \neq x_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{1}$$

последовательность $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, имела предел (конечный или бесконечный).

Доказательство. Необходимость очевидна. Действительно, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \; f(x) \to a \text{ при } x \to x_0,$$

то, согласно определению предела функции по Гейне,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \tag{2}$$

для любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условиям (1).

Докажем достаточность. Для этого покажем, что предел (2) не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условиям (1).

Пусть $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ — произвольные последовательности, удовлетворяющие условиям (1). Очевидно, последовательность $\{x_n\}$, у которой $x_{2k-1} = x'_k$ и $x_{2k} = x''_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, тоже удовлетворяет условиям (1). Тогда, согласно условию, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел. А так как $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ — подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Согласно определению предела функции по Гейне, этот общий предел и будет пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Лемма доказана.

Теперь, исходя из определения предела по Коши, для функций сформулируем и докажем *критерий Коши* существования конечного предела, аналогичный критерию Коши для последовательностей.

Теорема. *Пусть x_0 — предельная точка множества X (конечная или бесконечная). Тогда, для того чтобы функция $f(x)$, $x \in X$, имела конечный предел при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что*

$$\forall x, x' \in \mathring{O}(x_0) \cap X \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{3}$$

Это условие называется *условием Коши*, а теорема — *критерием Коши существования предела функции.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел A, то, согласно определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$\forall x \in \mathring{O}(x_0) \cap X \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что для этой окрестности $O(x_0)$ выполняется условие (3), так как

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - A| + |A - f(x')|.$$

Необходимость условия Коши для существования конечного предела у $f(x)$ при $x \to x_0$ доказана. Докажем достаточность.

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 удовлетворяет условию Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $O(x_0)$ такая, что выполняется неравенство (3). Если теперь последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\forall n \quad x_n \in X, \quad x_n \neq x_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{4}$$

то $\exists N : \forall n \geq N \;\; x_n \in \overset{\circ}{O}(x_0)$, и поэтому

$$\forall n, m \geq N \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию Коши. Согласно критерию Коши, она имеет конечный предел. Так как это утверждение справедливо для любой последовательности x_n, удовлетворяющей условиям (4), то, согласно доказанной лемме, функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет предел. Теорема доказана.

§ 3. Непрерывные функции

3.1. Определение непрерывности. Точки разрыва. Начнем с определения непрерывности функции в точке, но прежде заметим, что точки любого множества делятся на *предельные* и *изолированные* (которые не являются предельными для него).

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в предельной точке $x_0 \in D_f$, если предел $f(x)$ при $x \to x_0$ существует и равен $f(x_0)$. В любой изолированной точке множества D_f функция $f(x)$ считается *непрерывной.*

Согласно этому определению, функции

$$y = x^2 + 1 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{-\sin^2 x}$$

непрерывны в любой точке из области определения: первая непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$, а вторая — в любой точке $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D_f$, то x_0 называется *точкой непрерывности функции* f. В противном случае точка $x_0 \in D_f$ называется *точкой разрыва функции* f.

К точкам разрыва функции f обычно относят и точки $x_0 \in \mathbb{R}$, которые не принадлежат D_f, но являются предельными точками и для множества $D_f \cap (-\infty; x_0)$, и для множества $D_f \cap (x_0; +\infty)$.

Например, для функций $y = \operatorname{sgn} x$ и $y = 1/x$ точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва, а любая точка $x_0 \neq 0$ — точка непрерывности.

Определение 3. Пусть x_0 — точка разрыва функции f. Тогда, если у $f(x)$ существует конечный предел при $x \to x_0$, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва.* Если же у $f(x)$ в точке

x_0 существуют конечные односторонние пределы, но они не равны, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. Все другие точки разрыва функции называются *точками разрыва второго рода*.

Согласно этому определению, функция $y = \operatorname{sgn} x$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв первого рода, а функция $y = |\operatorname{sgn} x|$ — устранимый разрыв.

Функции

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{|x|}, \qquad y = \sin\frac{1}{x}$$

в точке $x_0 = 0$ имеют разрывы второго рода.

Переформулируем определение 1 непрерывности функции в точке на языке последовательностей и окрестностей.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D_f$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится и ее предел равен $y_0 = f(x_0)$.

Очевидно, если точка $x_0 \in D_f$ — предельная точка для D_f, то, согласно этому определению, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

так как условие $x_n \neq x_0$, имеющееся в определении предела, здесь несущественно. Если же x_0 — изолированная точка множества D_f, то любая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D_f$, сходящаяся к x_0, является стационарной, и поэтому $f(x_n) = f(x_0)$, начиная с некоторого номера.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D_f$, если выполняется условие:

$$\forall O(y_0) \quad \exists O(x_0): \quad \forall x \in \mathring{O}(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O(y_0). \tag{1}$$

В простейшем случае, когда функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, условие (1) принимает вид:

$$\forall O(y_0) \quad \exists O(x_0): \quad \forall x \in O(x_0) \quad f(x) \in O(y_0). \tag{2}$$

В этом случае определение непрерывности функции в точке обычно формулируют следующим образом.

Определение 6. Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Из соответствующих теорем о пределах функций, как следствия, получаются следующие утверждения о непрерывных функциях.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $y = |f(x)|$ тоже непрерывна в точке x_0.*

Теорема 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$ и $f(x)g(x)$ тоже непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то и функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Теорема 3. *Если функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(t)$, то сложная функция $f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{t_n\}$ такая, что $t_n \in D_\varphi$, $x_n = \varphi(t_n) \in D_f$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. Тогда $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi(t_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\varphi(t_0)).$$

Теорема 3 доказана.

Определение 7. Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева* (*справа*) в точке $x_0 \in D_f$, если $f(x_0-0)$ (соотв., $f(x_0+0)$) существует и равен $f(x_0)$.

Очевидно, функция $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x, во всех нецелых точках x_0 непрерывна, а в целых точках имеет разрыв первого рода, причем в этих точках она непрерывна справа и разрывна слева.

Определение 8. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subset D_f$, если ее сужение на множество X есть непрерывная функция в любой точке $x_n \in X$.

Например, функция $y = x^3$ непрерывна на $\mathbb{R}$, функция $y = 1/x$ непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а функция $y = [x]$ непрерывна на каждом промежутке $[p; p+1)$, где p целое.

3.2. Свойства функций, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах. Напомним, что простейшим ограниченным замкнутым множеством действительных чисел является отрезок. Ниже, для простоты, можно считать, что рассматриваемые функции определены и непрерывны на отрезках.

Теорема. *Если функция f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X, то множество $f(X)$ ограниченное и замкнутое.*

Доказательство. Так как функция f непрерывна на множестве X, то у каждой точки $x_0 \in X$ существует окрестность $O(x_0)$ такая, что

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \quad \forall x \in O(x_0) \cap X.$$

Совокупность интервалов $O(x_0)$, $x_0 \in X$, является покрытием множества X. Согласно лемме Гейне–Бореля, из этого покрытия можно выбрать конечное число интервалов $O(x_1), \ldots, O(x_N)$, которые снова образуют покрытие множества X.

Положим $m = \min\limits_j(f(x_j) - 1)$, $M = \max\limits_j(f(x_j) + 1)$. Тогда, очевидно,

$$m < f(x) < M \quad \forall x \in X.$$

Ограниченность множества $f(X)$ доказана. Докажем замкнутость множества $f(X)$.

Пусть теперь y_0 — предельная точка множества $f(X)$. Тогда существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что

$$y_n \in f(X) \quad \forall n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Через x_n обозначим точку из X, в которой $f(x_n) = y_n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Так как множество X замкнутое, то точка $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ принадлежит X. А так как функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Следовательно, $y_0 = f(x_0)$, т.е. $y_0 \in f(X)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X, то среди элементов множества $f(X)$ есть как наибольшее, так и наименьшее.*

Доказательство. По доказанной выше теореме, множество $f(X)$ ограниченное и замкнутое, поэтому (см. теорему 1 из п. 7.3 гл.1) среди его элементов есть и наибольшее, и наименьшее. Следствие доказано.

Доказанное следствие обычно формулируют следующим образом: *Если функция непрерывна на некотором отрезке, то она на этом отрезке имеет как наибольшее, так и наименьшее значение.*

Следующие примеры показывают, что все условия теоремы и следствия существенные.

Непрерывная на ограниченном интервале $(0;1)$ функция $y = 1/x$ является неограниченной на $(0;1)$.

Непрерывная на неограниченном промежутке $[0;+\infty)$ функция $y = x$ является неограниченной на $[0;+\infty)$. (Заметим, что промежуток $[0;+\infty)$ — замкнутое множество.)

Непрерывная на интервале $(0;1)$ функция $y = x$ на $(0;1)$ не имеет ни наибольшего значения, ни наименьшего.

Непрерывная на промежутке $[0;+\infty)$ функция $y = 1/(1+x^2)$ на $[0;+\infty)$ не имеет наименьшего значения.

3.3. Свойства функций, непрерывных на промежутках. Заметим, что любой промежуток Δ числовой прямой $\mathbb{R}$ обладает следующим свойством: если $a \in \Delta$, $b \in \Delta$, $a < b$, то и $[a;b] \subset \Delta$. Очевидно, справедливо и обратное утверждение : если числовое множество обладает этим свойством, то оно является промежутком.

Теорема 1. *Если функция f на промежутке Δ непрерывна и принимает значения A и B, $A < B$, то она на Δ принимает и любое промежуточное значение $C \in (A; B)$.*

Доказательство. По условию, в Δ существуют точки a и b такие, что $f(a) = A$, $f(b) = B$. Если, например, $a < b$, то $[a; b] \subset \Delta$.

Через c_1 обозначим середину отрезка $[a; b]$. Если $f(c_1) = C$, то утверждение доказано.

Пусть $f(c_1) \neq C$. Тогда, если $f(c_1) > C$, то положим $a_1 = a$, $b_1 = c_1$, а если $f(c_1) < C$, то $a_1 = c_1$, $b_1 = b$, и поэтому всегда $f(a_1) < C < f(b_1)$.

Отрезок $[a_1; b_1]$ снова разделим пополам, и через c_2 обозначим его середину. Если $f(c_2) = C$, то утверждение доказано. Если же $f(c_2) \neq C$, то через $[a_2; b_2]$ обозначим ту половину, для которой $f(a_2) < C < f(b_2)$, и т.д. Процесс или обрывается на некотором шаге, и тогда утверждение доказано, или получается последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ и

$$f(a_n) < C < f(b_n) \quad \forall n. \tag{1}$$

Известно, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся и их пределы равны. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Очевидно, $c \in [a; b]$.

Так как функция f непрерывна в точке c, то из неравенств (1) в пределе при $n \to \infty$ получаем равенство $f(c) = C$.

Случай, когда $a > b$, рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

Эту теорему называют *теоремой о промежуточных значениях*. Ее можно сформулировать следующим образом: *Если функция f непрерывна на промежутке Δ, то множество $f(\Delta)$ является промежутком.*

А в терминах отображений она формулируется еще короче: *При непрерывном отображении образом промежутка является промежуток.*

Обратное утверждение является неверным. Например, функция $f(x)$, равная $\sin(1/x)$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, является разрывной в точке $x = 0$, однако у нее образ любого отрезка есть отрезок. Докажем, что для монотонных функций обратное утверждение является верным.

Теорема 2. *Если функция f определена и монотонна на промежутке Δ и $f(\Delta)$ — промежуток, то f непрерывна на Δ.*

Доказательство. Допустим, что функция f разрывна в точке $x_0 \in \Delta$. Так как она монотонна, то x_0 — точка разрыва первого рода. Пусть, например, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$. Тогда функция

f не принимает значения, лежащие между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0)$, и поэтому $f(\Delta)$ не является промежутком, что противоречит условию. Следовательно, $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Аналогично доказывается, что $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, если, конечно, x_0 не является правым концом промежутка Δ. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке Δ, то $f(\Delta)$ — отрезок.*

Доказательство. Пусть $m = \inf f(\Delta)$, $M = \sup f(\Delta)$. Тогда, очевидно, $f(\Delta) \subset [m; M]$, а так как функция f непрерывна на отрезке Δ, то (см. п.3.2) она на Δ принимает значения m и M, а по теореме 1 и все значения из отрезка $[m; M]$. Следовательно, $f(\Delta) = [m; M]$. Теорема 3 доказана.

Таким образом, при непрерывном отображении образом отрезка всегда является отрезок. Однако, как показывают примеры, образом интервала может быть любой промежуток.

3.4. Непрерывность обратной функции. Для обратных функций имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ определена и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, то обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ строго возрастает на $O(x_0)$. Тогда она на $O(x_0)$ обратима, и обратная функция $x = \varphi(y)$ строго возрастает на множестве $f(O(x_0))$.

Пусть $(a; b)$ — некоторая окрестность точки x_0. Не ограничивая общности, будем считать, что $(a; b) \subset O(x_0)$. Тогда $a < x_0 < b$, $f(a) < y_0 < f(b)$ и

$$\forall y \in (f(a); f(b)) \cap D_\varphi \quad \varphi(y) \in (a; b).$$

Следовательно, функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0.

Случай строго убывающей функции рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

Докажем еще одну теорему о непрерывности обратной функции.

Теорема 2. *Если строго монотонная функция f непрерывна на промежутке Δ, то обратная функция непрерывна на промежутке $f(\Delta)$.*

Доказательство. Ранее доказано, что строго монотонная функция f имеет обратную f^{-1}. В п.3.3 доказано, что если f непрерывна на промежутке Δ, то $f(\Delta)$ — промежуток. Следовательно, обратная функция f^{-1} определена на промежутке $f(\Delta)$ и, по самому определению, $f^{-1}(f(\Delta)) = \Delta$. Так как f^{-1} монотонная на $f(\Delta)$, то, в силу теоремы 2 из п.3.3, f^{-1} непрерывна на $f(\Delta)$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Непрерывность элементарных функций

4.1. Многочлены и рациональные функции. Напомним, что многочленом или целой рациональной функцией называется функция вида $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, где a_k — некоторые числа. Она определена на всей действительной оси $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Любой многочлен является непрерывной функцией на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Так как любой многочлен получается из функций $y = c$ и $y = x$ с помощью конечного числа сложений и умножений, а эти функции непрерывны на $\mathbb{R}$, то и любой многочлен непрерывен на $\mathbb{R}$ (см. теорему 2 из п. 3.1). Теорема 1 доказана.

Напомним, что рациональная функция — это отношение двух многочленов. Она определена всюду, где знаменатель не обращается в нуль.

Теорема 2. *Рациональная функция непрерывна в любой точке области определения.*

Доказательство следует из теоремы 1 и из теоремы 2 п.3.1.

4.2. Показательная и логарифмическая функции. Показательная и логарифмическая функции рассматривались еще в п.1.3. Предел показательной функции в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ вычислялся в примере 1 из п.2.2.

Теорема 1. *Показательная функция непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство было проведено в примере 1 из п.2.2.

Теорема 2. *Логарифмическая функция непрерывна на интервале* $(0; +\infty)$.

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы о непрерывности обратной функции.

Для лучшего понимания проведем доказательство без ссылок на указанную теорему.

Пусть $c > 1$, $x_0 > 0$, $y_0 = \log_c x_0$. Тогда для любого интервала $(a; b)$ выполняется условие: если $y_0 \in (a, b)$, то $x_0 \in (c^a; c^b)$, и

$$\forall x \in (c^a; c^b) \quad \log_c x \in (a; b),$$

что и доказывает теорему 2 в случае $c > 1$. Теорема 2 доказана.

4.3. Степенная функция. Степенная функция рассматривалась еще в п. 1.4. В примере 3 из п. 2.3 было доказано, что

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$$

для любого $\alpha > 0$.

Теорема. *Степенная функция непрерывна в любой точке области определения.*

Доказательство. Непрерывность степенной функции $y = x^\alpha$ на интервале $(0; +\infty)$ следует из теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций, так как $y = e^{\alpha \ln x}$, а показательная и логарифмическая функции непрерывны.

Если α такое, что степенная функция $y = x^\alpha$ определена и при $x < 0$, то она на $\mathbb{R}$ или четная, или нечетная, и тогда ее непрерывность на интервале $(-\infty; 0)$ следует из непрерывности на интервале $(0; +\infty)$. Если же $\alpha > 0$, то степенная функция определена и при $x = 0$. Этот случай рассмотрен в п.2.3 в примере 3. Теорема доказана.

Для лучшего понимания приведем прямое доказательство непрерывности степенной функции $y = x^\alpha$, где $\alpha > 0$, на интервале $(0; +\infty)$.

Пусть $x_0 > 0$, $y_0 = x_0^\alpha$ и $(a; b)$ — некоторая окрестность точки y_0. Без ограничения общности можно считать, что $a > 0$. Тогда $x_0 \in (a^{1/\alpha}; b^{1/\alpha})$, и

$$\forall x \in (a^{1/\alpha}; b^{1/\alpha}) \quad x^\alpha \in (a; b),$$

что и доказывает теорему в случае $\alpha > 0$ на интервале $(0; +\infty)$.

4.4. Тригонометрические функции. Тригонометрические функции определялись в п.1.5., там же определялись и обратные тригонометрические функции.

Теорема 1. *Тригонометрические функции*

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x$$

непрерывны на $\mathbb{R}$.

Доказательство непрерывности косинуса приведено в п.2.1. (см. пример 1), а доказательство непрерывности синуса — в п.2.2. (см. пример 3).

Теорема 2. *Тригонометрические функции*

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad y = \operatorname{ctg} x$$

непрерывны в любой точке области определения.

Доказательство следует из непрерывности синуса и косинуса и из теоремы о непрерывности отношения непрерывных функций.

Теорема 3. *Обратные тригонометрические функции*

$$y = \arcsin x \quad \text{и} \quad y = \arccos x$$

определены и непрерывны на отрезке $[-1; 1]$.

Теорема 4. *Обратные тригонометрические функции*

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad y = \operatorname{arcctg} x$$

определены и непрерывны на всей действительной оси.

Теоремы 3 и 4 следуют из непрерывности тригонометрических функций и из теоремы о непрерывности обратной функции.

В заключение докажем теорему о непрерывности произвольной элементарной функции.

Теорема 5. *Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области определения.*

Доказательство. Так как любая элементарная функция, по определению, получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, то ее непрерывность в любой точке области определения следует из непрерывности элементарных функций, теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и отношения непрерывных функций и теоремы о непрерывности сложной функции. Теорема 5 доказана.

4.5. Замечательные пределы. Ранее было доказано, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2}$$

В этом пункте, используя эти пределы и теорему о замене переменного под знаком предела, вычислим еще несколько важных пределов.

Теорема. *Если функция $\varphi(x)$ имеет предел при $x\to x_0$ и он равен y_0, а функция $f(y)$ имеет предел при $y\to y_0$ и, кроме того, $\forall x\in D_\varphi\ \ \varphi(x)\in D_f$, $\varphi(x)\neq y_0$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет предел при $x\to x_0$ и*

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{y\to y_0} f(y). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\forall n\ \ x_n\in D_\varphi,\ x_n\neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Тогда последовательность $y_n=\varphi(x_n)$ сходится к y_0 при $n\to\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi(x_n))=\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{y\to y_0} f(y).$$

Теорема доказана.

Формула (3) называется *формулой замены переменного под знаком предела.* В ней x_0 и все рассматриваемые пределы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

Решение. Сделаем замену $y = \arcsin x$, $x = \sin y$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$, все условия теоремы о замене переменного под знаком предела выполнены, и поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

В конце мы воспользовались формулой (1).

Пример 2.

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4}$$

Решение. Сделаем замену $y = -x$. Тогда $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y},$$

если последний предел существует. Найдем этот предел. Так как

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y,$$

то, положив $t = y - 1$, получим $t \to +\infty$ при $y \to +\infty$ и

$$\lim_{y\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{t\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = e.$$

В конце мы воспользовались формулой (2) и теоремой о пределе произведения.

Из (2) и (4) следует формула

$$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$

Решение. Сделаем замену $y = 1/x$. Тогда $y \to \infty$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = \lim_{y\to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$, где, как обычно, $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение. Сделаем замену $y = (1 + x)^{1/x}$. Тогда $y \to e$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{y\to e} \log_a y = \log_a e.$$

В конце мы воспользовались непрерывностью логарифма. В частности, если $a = e$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Решение. Сделаем замену $y = a^x - 1$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

§ 5. Сравнение асимптотического поведения функций

5.1. Функции одного порядка при $x \to x_0$. Во многих случаях важно знать поведение данной функции $f(x)$ при $x \to x_0$, где x_0 — предельная точка множества X, на котором определена функция f. Для этого ее сравнивают с некоторой другой функцией $g(x)$, которая в некотором смысле проще или более изучена в окрестности точки x_0.

Определение 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, и пусть x_0 — предельная точка множества X (конечная или бесконечная). Говорят, что *функция $f(x)$ есть O-большое от $g(x)$ при $x \to x_0$*, и пишут

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

если существуют постоянная $C > 0$ и окрестность точки x_0 такие, что в этой окрестности для любого $x \in X$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство

$$|f(x)| \le C|g(x)|.$$

В частности, запись $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0. Например,

$$\begin{aligned}
&\sin x = O(1) && \text{при } x \to 0,\\
&\sin x = O(1) && \text{при } x \to +\infty,\\
&\sin x = O(x) && \text{при } x \to 0,\\
&\sin^2 x = O(\sin x) && \text{при } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Очевидно, если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, т.е. *символ O-большое обладает свойством транзитивности.* Для него справедлива и так называемая *теорема сложения*: если $f(x) = O(\varphi(x))$ и $g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) + g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.

Определение 2. Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to x_0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *функциями одного порядка* (или *подобными функциями*) *при* $x \to x_0$. В этом случае пишут:

$$f(x) \asymp g(x) \text{ при } x \to x_0.$$

Теорема 2. *Пусть x_0 — предельная точка (конечная и бесконечная) множества X, на котором определены фнкции f и g, и пусть*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = k.$$

Тогда, если $0 < k < +\infty$, то $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to x_0$; если же $k = 0$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$, а если $k = +\infty$, то $g(x) = O(f(x))$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Если $0 < k < +\infty$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$\frac{k}{2} < \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \frac{3k}{2} \quad \forall x \in \mathring{O}(x_0) \cap X.$$

Если же $k = 0$, то

$$\exists O(x_0): \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < 1 \quad \forall x \in \mathring{O}(x_0) \cap X,$$

а если $k = +\infty$, то

$$\exists O(x_0): \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} > 1 \quad \forall x \in \mathring{O}(x_0) \cap X.$$

Теорема доказана.

Таким образом, например,

$$\begin{aligned} &\sin x \asymp x && \text{при } x \to 0, \\ &\sin 3x \asymp x && \text{при } x \to 0, \\ &2x^2 + x + 3 \asymp x^2 && \text{при } x \to +\infty. \end{aligned}$$

Очевидно, если $f(x) \asymp g(x)$ и $g(x) \asymp \varphi(x)$ при $x \to x_0$, то $f(x) \asymp \varphi(x)$ при $x \to x_0$, т.е. *отношение подобия обладает свойством транзитивности.*

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ являются бесконечно малыми (или большими) и подобными, то они называются *бесконечно малыми* (соотв., *большими*) *одного порядка при* $x \to x_0$. Например, функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sin^2 3x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, а функции $f(x) = x^2$ и $\varphi(x) = (3x+1)^2$ при $x \to +\infty$ являются бесконечно большими одного порядка.

5.2. Функции разных порядков при $x \to x_0$. В предыдущем пункте был определен символ O-большое и изучены его свойства. Здесь введем символ o-малое и рассмотрим его свойства.

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, и пусть x_0 — предельная точка множества X (конечная или бесконечная). Говорят, что *функция* $f(x)$ *есть o-малое от* $g(x)$ *при* $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0,$$

если в некоторой окрестности точки x_0 для любого $x \in X$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq \alpha(x)|g(x)|,$$

где функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

В частности, запись $f(x) = o(1)$ *при* $x \to x_0$ означает, что $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$. Например,

$$\begin{aligned}
&\sin x = o(1) && \text{при } x \to 0,\\
&\sin x = o(x^{1/3}) && \text{при } x \to 0,\\
&x^2 = o(x) && \text{при } x \to 0,\\
&x = o(x^2) && \text{при } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Очевидно, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

то $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$. Действительно, обозначив отношение $|f(x)|/|g(x)|$ через $\alpha(x)$, получим: $|f(x)| = \alpha(x)|g(x)|$ и $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$.

Лемма. *Если* $f(x) = O(g(x))$, *а* $g(x) = o(\varphi(x))$ *при* $x \to x_0$, *то* $f(x) = o(\varphi(x))$ *при* $x \to x_0$.

Доказательство. Из условия следует, что существует окрестность точки x_0 такая, что в этой окрестности для любого $x \in X$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство:

$$|f(x)| \leq C|g(x)|,$$

где C — некоторая постоянная. А так как $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то существуют окрестность точки x_0 и функция $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ такие, что

$$|g(x)| \le \alpha(x)|\varphi(x)|$$

для любого $x \in X$, $x \ne x_0$, из указанной окрестности. Поэтому

$$|f(x)| \le C\alpha(x)|\varphi(x)|$$

для любого $x \in X$, $x \ne x_0$, из некоторой окрестности точки x_0. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.

Аналогично доказываются следующие утверждения:

1. Если $f(x) = o(\varphi(x))$ и $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) \pm g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.
2. Если $f(x) = o(\varphi(x))$, а $g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x)g(x) = o(\varphi^2(x))$ при $x \to x_0$.

Доказать эти утверждения в качестве упражнения.

5.3. Эквивалентные функции при $x \to x_0$. Пусть, как и в предыдущих пунктах, функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, и пусть x_0 — предельная точка множества X.

Определение. Говорят, что *функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$*, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то и $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство. Из условия: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, следует, что в некоторой окрестности точки x_0 для любого $x \in X$, $x \ne x_0$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - g(x)| \le \alpha(x)|g(x)|, \tag{2}$$

где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$. В частности,

$$|g(x)| - |f(x)| \le \alpha(x)|g(x)|, \quad (1 - \alpha(x))|g(x)| \le |f(x)|.$$

Отсюда и из неравенства (2) следует, что существует окрестность точки x_0, в которой для любого $x \in X$, $x \ne x_0$, выполняется неравенство

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\alpha(x)}{1 - \alpha(x)}|f(x)|.$$

Так как

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{1 - \alpha(x)} = 0,$$

то $g(x) - f(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0$, т.е. $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, отношение эквивалентности функций обладает свойством симметрии. Поэтому, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to x_0$.

Теорема 2. *Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$, то $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство. По условию, в некоторых окрестностях точки x_0 для любого $x \in X$, $x \neq x_0$, выполняются неравенства:

$$|f(x) - g(x)| \le \alpha(x)|g(x)|, \quad |g(x) - \varphi(x)| \le \beta(x)|\varphi(x)|,$$

где $\alpha(x) = o(1)$ и $\beta(x) = o(1)$ при $x \to x_0$. Тогда

$$|g(x)| \le |\varphi(x)| + \beta(x)|\varphi(x)|,$$

$$|f(x) - \varphi(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - \varphi(x)| \le$$
$$\le \alpha(x)|g(x)| + \beta(x)|\varphi(x)| \le (\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x) + \beta(x))|\varphi(x)|,$$

и поэтому $f(x) - \varphi(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, т.е. $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$. Теорема 2 доказана.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, эквивалентные при $x \to x_0$, называются также *асимптотически равными при* $x \to x_0$, а соотношения вида (1) или, что то же самое,

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ при } x \to x_0$$

называются *асимптотическими равенствами.*

Лемма. *Если в некоторой окрестности точки x_0 $g(x) \neq 0$ для любого $x \in X$, $x \neq x_0$, и*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

то $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Положим $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$. Тогда $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ и $f(x) - g(x) = \alpha(x)g(x)$.

Следовательно, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Лемма доказана.

Легко видеть, что, например,

$$\sin x \sim x \quad \text{при } x \to 0,$$
$$x^2(1+x)^{-3} \sim x^2 \quad \text{при } x \to 0,$$
$$x^2(1+x)^{-3} \sim x^{-1} \quad \text{при } x \to \pm\infty.$$

5.4. Асимптоты. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для любого $x > a$, и пусть $g(x) \neq 0$ $\forall x > a$. Тогда соотношение эквивалентности:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to +\infty$$

указывает лишь на то, что относительная погрешность

$$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$$

приближенного равенства $f(x) \approx g(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Однако из этого соотношения не следует, что абсолютная погрешность уменьшается при $x \to +\infty$. Например,

$$f(x)=\frac{x^3}{x+1} \sim x^2 \text{ при } x \to +\infty,$$

т.е. $f(x)=x^2+o(x^2)$ при $x \to +\infty$. Абсолютная величина разности

$$f(x)-x^2=-\frac{x^2}{x+1}$$

не уменьшается при $x \to +\infty$, причем $f(x)-x^2 \sim -x$ при $x \to +\infty$, т.е. $f(x)=x^2-x+o(x)$ при $x \to +\infty$. Далее,

$$f(x)-x^2+x=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}=1+o(1)$$

при $x \to +\infty$, Таким образом,

$$f(x)=x^2-x+1+o(1) \text{ при } x \to +\infty. \tag{1}$$

Такого вида соотношения называются *асимптотическими разложениями* данной функции по степеням x при $x \to +\infty$. Заметим, что асимптотическое разложение (1) можно продолжить:

$$f(x)=x^2-x+1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{при } x \to +\infty,$$

$$f(x)=x^2-x+1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to +\infty$$

и т.д.

Аналогично можно рассматривать асимптотические разложения функции по степеням $x-x_0$ при $x \to x_0$. Например,

$$f(x)=\frac{x^3}{x+1}=x^3+o(x^3) \quad \text{при } x \to 0,$$

$$f(x)=x^3-x^4+o(x^4) \qquad \text{при } x \to 0,$$

$$f(x)=x^3-x^4+x^5+o(x^5) \text{ при } x \to 0$$

и т.д.

Мы не будем развивать теорию асимптотических разложений. Здесь мы ограничимся рассмотрением вопросов, связанных с понятием асимптот ветвей графика функции, уходящих на бесконечность, т.е. когда $x \to \pm\infty$ или $y = f(x) \to \pm\infty$ при $x \to x_0$ слева или справа.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$). Тогда прямая l называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ (соотв., *при* $x \to -\infty$), если

$$\rho(x; l) = o(1) \text{ при } x \to +\infty \quad (x \to -\infty), \tag{1}$$

где $\rho(x;l)$ — расстояние от точки с координатами $(x; f(x))$ до прямой l.

Теорема. *Для того чтобы график функции $y = f(x)$, $x > a$ $(x < a)$, имел асимптоту при $x \to +\infty$ (соотв., при $x \to -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы существовали числа k и b такие, что*

$$f(x) = kx + b + o(1) \text{ при } x \to +\infty \quad (x \to -\infty). \tag{2}$$

Тогда эта асимптота имеет уравнение $y = kx + b$.

Доказательство. Как известно, расстояние от прямой l, заданной уравнением $y = kx + b$, до точки $(x; f(x))$ определяется по формуле:

$$\rho(x; l) = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

поэтому если выполняется условие (1), то выполняется и условие (2), и наоборот. Теорема доказана.

Из условия (2) следует способ отыскания асимптоты графика функции $y = f(x)$, $x > a$ $(x < a)$, при $x \to +\infty$ (соотв., при $x \to -\infty$). Действительно, так как

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b + o(1)}{x} = k + o(1),$$

$$b = f(x) - kx + o(1) \text{ при } x \to +\infty \quad (x \to -\infty),$$

то

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; x_0)$ (или на $(x_0; a)$), и пусть $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to x_0 - 0$ (соотв., при $x \to x_0 + 0$). Тогда прямая l, заданная уравнением $x = x_0$, называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0 - 0$ (соотв., *при* $x \to x_0 + 0$).

Вертикальная асимптота удовлетворяет условию, аналогичному условию (1), так как в этом случае $\rho(x; l) = |x - x_0|$, и поэтому

$$\rho(x; l) = o(1) \text{ при } x \to x_0 - 0 \quad (x \to x_0 + 0).$$

Очевидно, график функции

$$y = \frac{x^3}{x+1}$$

имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ при $x \to -1 \pm 0$, но не имеет асимптот при $x \to \pm\infty$.

График функции

$$y = \frac{x^2}{1+x}$$

имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ при $x \to 1 \pm 0$ и асимптоту $y = x - 1$ при $x \to \pm\infty$.

График функции

$$y = \frac{x^2}{1+|x|}$$

не имеет вертикальных асимптот, а при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ имеет асимптоты: $y = x - 1$ при $x \to +\infty$ и $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$.

Глава 3. Производные, дифференциалы и первообразные

§ 1. Определения производных и дифференциалов

1.1. Определение производной. Пусть заданы функция f и точка $x_0 \in D_f$. Тогда для любого $x \in D_f$, $x \neq x_0$, частное

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1}$$

где $h = x - x_0$, называется *разностным отношением функции f в точке x_0 с шагом h*.

Определение 1. Предел разностного отношения функции f в точке $x_0 \in D_f$ с шагом h при $h \to 0$ называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

Аналогично определяются *односторонние производные*.

Определение 2. Предел разностного отношения функции f в точке $x_0 \in D_f$ с шагом h при $h \to +0$ ($h \to -0$) называется *правой* (*левой*) *производной функции f в точке x_0* и обозначается $f'_+(x_0)$ (соотв., $f'_-(x_0)$).

Таким образом,

$$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{h\to\pm 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

Из определения 1 следует, что о производной функции f в точке $x_0 \in D_f$ можно говорить только тогда, когда x_0 является предельной точкой множества D_f. Аналогично, о правой (левой) производной функции f в точке $x_0 \in D_f$ можно говорить только тогда, когда x_0 — предельная точка множества $D_f \cap [x_0; +\infty)$ (соотв., $D_f \cap (-\infty; x_0]$). Для простоты в определении 1 обычно предполагают, что точка x_0 является внутренней точкой множества D_f, т.е. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. А в определении 2 считают, что функция f определена на некотором промежутке вида $[x_0; b)$ (соотв., $(a; x_0]$). Эти промежутки называются *односторонними окрестностями точки* x_0, соответственно, *правой* и *левой*.

Очевидно, функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она в x_0 имеет односторонние производные и эти производные равны.

Заметим, что пределы (2) и (3) могут быть как конечными, так и бесконечными, и поэтому можно говорить о *конечных* и *бесконечных производных*. В дальнейшем выражение «функция имеет производную» означает, что функция имеет конечную производную. Случай бесконечных производных оговаривается особо.

Определение 3. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечную производную.

Формулы (2) и (3) часто записывают в других обозначениях. Вместо x_0 пишут x, шаг h разностного отношения (1) обозначают Δx, и тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Здесь Δx называется *приращением аргумента*, а разность $f(x+\Delta x) - f(x)$ — соответствующим *приращением функции*. Если $y = f(x)$, то это приращение функции обозначают Δy, а производную функции f в точке x обозначают y'. В этих обозначениях формула (4) принимает вид

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Аналогичным образом записываются и формулы (3). В такой форме определение производной коротко формулируют так:

Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Определение 4. Пусть D'_f — множество точек, в которых функция f дифференцируема. Тогда функция, которая каждому $x \in D'_f$ ставит в соответствие число $f'(x)$, называется *производной* функции $y = f(x)$ и обозначается f' или y'.

Операция нахождения производной данной функции f называется *дифференцированием функции* f.

Рассмотрим несколько примеров на дифференцирование элементарных функций.

Пример 1. $y = c$, где c — некоторая постоянная.

Так как $\Delta y = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого Δx, то $y' = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Следовательно, производная постоянной равна нулю: $c' = 0$.

Пример 2.

$$y = \sin x.$$

Так как $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $y' = \cos x$, т.е. производная $\sin x$ равна $\cos x$. Это утверждение записывают в виде формулы

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Пример 3. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Если $x > 0$, то $f(x) = x$ и $f(x + h) = x + h$ и для любого h, у которого $|h| < |x|$. Для таких x и h разностное отношение (1) равно 1. Следовательно, $f'(x) = 1$ для любого $x > 0$.

Аналогично доказывается, что $f'(x) = -1$ для любого $x < 0$.

В точке $x_0 = 0$ имеем: $f(x_0) = 0$, $f(x_0 + h) = |h|$ и, следовательно, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Таким образом,

$$(|x|)' = \operatorname{sgn} x \quad \forall x \neq 0.$$

В точке $x = 0$ данная функция имеет односторонние производные $f'_\pm(0) = \pm 1$, но не является дифференцируемой.

Пример 4.

$$y = \cos x$$

Так как $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, то $y' = \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $(\cos)' = -\sin x$.

Пример 5. $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Согласно определению производной,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

а так как последний предел равен $\ln a$, то $y' = a^x \ln a$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В частности, $(e^x)' = e^x$.

Пример 6. $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Данная функция определена для любого $x > 0$. Если приращение Δx такое, что $|\Delta x| < x$, то $x + \Delta x > 0$ и

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

В последнем пределе сделаем замену $t = \Delta x / x$. Тогда

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \log_a (1+t)^{1/t} = \frac{1}{x} \log_a e$$

для любого $x > 0$. Следовательно, функция $y = \log_a x$ дифференцируема в любой точке $x > 0$ и

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e. = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

В частности, $(\ln x)' = 1/x$.

1.2. Линейное приближение и дифференциал. Сначала докажем одно простое, но важное утверждение о линейном приближении дифференцируемой функции.

Лемма 1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \tag{1}$$

где функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\alpha(x_0) = 0$.

Доказательство. Положим $\alpha(x_0) = 0$, а для $x \neq x_0$

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Тогда, очевидно, $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0 и выполняется равенство (1). Лемма 1 доказана.

Следствие. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение является неверным. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но она в этой точке не имеет производной.

Условие (1) обычно записывается в виде асимптотического равенства:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\Delta x)$$

при $x \to x_0$, где $\Delta x = x - x_0$.

Теперь доказанное утверждение можно сформулировать следующим образом:

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в окрестности точки x_0 с точностью до $o(\Delta x)$ она ведет себя как линейная функция $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 2. *Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует число A такое, что*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\Delta x) \quad \text{при } x \to x_0, \tag{2}$$

то эта функция дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = A$.

Доказательство. Из условия (2) следует, что

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Лемма 2 доказана.

Таким образом, справедлив следующий критерий дифференцируемости:

Для того чтобы функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\exists A: \quad \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \tag{3}$$

при $\Delta x \to 0$.

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то линейная функция $f'(x_0)\Delta x$, $\Delta x \in \mathbb{R}$, называется *дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0* и обозначается dy или $df(x_0)$.

Следовательно, по определению,

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Для симметрии Δx обозначают dx и называют дифференциалом независимого переменного. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad (\text{или } dy = y'dx).$$

Отсюда получаем новые обозначения для производной через отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0), \qquad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Из условия (3) следует, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\Delta y \approx dy$ с точностью до $o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Из определения дифференциала и примеров, рассмотренных в предыдущем пункте, получаем следующие формулы:

$$dc = 0, \quad d\sin x = \cos x\, dx, \quad d\cos x = -\sin x\, dx,$$

$$da^x = a^x \ln a\, dx, \quad de^x = e^x\, dx,$$

$$d\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e\, dx, \quad d\ln x = \frac{dx}{x}.$$

1.3. Геометрический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, и пусть M_0 — точка с координатами x_0 и $y_0 = f(x_0)$, а M_h — точка с координатами $x_0 + h$ и $f(x_0 + h)$ (рис. 3.1). Тогда прямая M_0M_h, называемая *секущей*, имеет уравнение

$$y - y_0 = \frac{\Delta f}{h}(x - x_0),$$

где $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Определение. Прямая M_0M, уравнение которой получается из уравнения секущей M_0M_h, при $h \to 0$, называется *касательной к графику функции* $y = f(x)$ в точке x_0 (или в точке M_0).

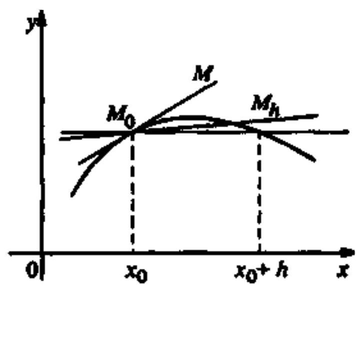

Рис. 3.1

Очевидно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке у графика касательная существует и имеет уравнение

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Такие касательные называются *наклонными*.

Отсюда следует, что производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла α, который образует касательная M_0M с осью Ox, т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Если же функция $y = f(x)$ в точке x_0 непрерывна и имеет бесконечную производную, равную $+\infty$ или $-\infty$, то из уравнения

$$(y - y_0)\frac{h}{\Delta f} = x - x_0$$

при $h \to 0$ получаем уравнение $x = x_0$. Следовательно, если $f'(x_0) = \pm\infty$, то в точке x_0 график имеет *вертикальную касательную*. В этом случае производная тоже равна тангенсу угла, который образует касательная с осью Ox (рис. 3.2 и рис. 3.3).

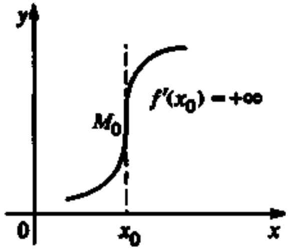

Рис. 3.2

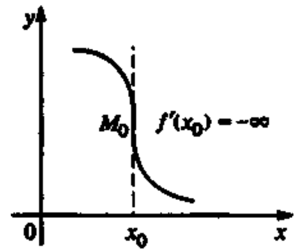

Рис. 3.3

Очевидно, верно и обратное утверждение: если график функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет касательную, которая образует с осью Ox угол α, то функция в точке x_0 имеет производную $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Особо рассмотрим случай, когда

$$f'_{\pm}(x_0) = \pm\infty \text{ и } f'_{\pm}(x_0) = \mp\infty.$$

В этих случаях прямая $x = x_0$ тоже называется *вертикальной касательной*, хотя она отличается от вертикальных касательных, когда $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$. Действительно, если $f'(x_0) = +\infty$, то точка M графика при переходе через точку M_0 подни-

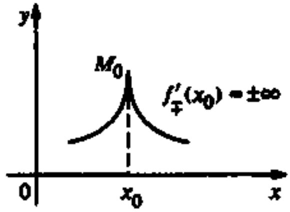

Рис. 3.4

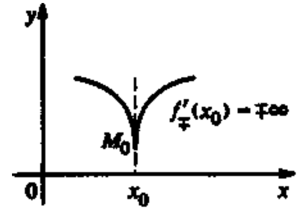

Рис. 3.5

мается вверх, а если $f'(x_0) = -\infty$, то M опускается вниз. Если же $f'_{\mp}(x_0) = \pm\infty$, то точка M сначала поднимается, а после M_0 опускается. Аналогично, если $f'_{\mp}(x_0) = \mp\infty$, то M сначала опускается, а затем поднимается. Поэтому такие точки называются *точками возврата* (рис. 3.4 и рис. 3.5).

Из геометрической интерпретации касательной и определения дифференциала следует, что если y — ордината касательной к графику функции в точке x_0, то

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x = df(x_0),$$

т.е. дифференциал функции f в точке x_0 равен приращению $\Delta y = y - y_0$ ординаты касательной к графику функции f в точке x_0.

1.4. Определения производных и дифференциалов высших порядков. Напомним, что через D_f мы обозначаем область определения функции f, а через D'_f — область определения производной f' этой функции.

Определение 1. Производная производной f' функции f в точке $x_0 \in D'_f$ называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) *функции f в точке x_0* и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Вообще, производная производной f' функции f называется *второй производной* функции $y = f(x)$ и обозначается f'', $f^{(2)}$ или y'', $y^{(2)}$.

Производные более высокого порядка определяются по индукции: производная производной $(n-1)$-го порядка функции f называется *производной n-го порядка* функции $y = f(x)$ и обозначается $f^{(n)}$ или $y^{(n)}$.

Теперь определим дифференциалы высших порядков.

По определению, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x — это линейная функция $dy = f'(x)h$, $h \in \mathbb{R}$. Его называют *первым дифференциалом* или *дифференциалом первого порядка*. При фиксированном h он является функцией от $x \in D'_f$. Найдем дифференциал этой функции $f'(x)h$ в точке x_0:

$$d(f'h) = hdf' = hf''(x_0)\,dx.$$

В результате получаем дифференциал от первого дифференциала в точке x_0, он является линейной функцией от h и линейной функцией от dx. Иногда он называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* функции f в точке x_0. Однако в учебниках по математике обычно дается другое определение.

Определение 2. Дифференциал от первого дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0 при $h = dx$ называется *дифференциалом второго порядка* этой функции в точке x_0 и обозначается $d^2 f(x_0)$ или $d^2 y$.

Следовательно,

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)\,dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$.

Аналогично, *дифференциал n-го порядка* определяется по формуле:

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\, dx^n,$$

где $dx^n = (dx)^n$.

Используя дифференциалы, получаем новые обозначения для производной n-го порядка от функции $y = f(x)$:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Пример 1. Покажем, что функция $y = \sin x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

Действительно, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$.

Очевидно, что и функция $y = \cos x$ удовлетворяет этому уравнению. Заметим, что это уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка. Вообще, *дифференциальными уравнениями* называются уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только эти функции, но и их производные.

Пример 2. Найдем вторую производную функции $y = \log_a x$.

Известно, что $y' = (1/\ln a)\cdot(1/x)$, поэтому $y'' = (-1/\ln a)\cdot(1/x^2)$. В частности, отсюда следует, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + y' = 0.$$

§ 2. Правила дифференцирования

2.1. Производная суммы, разности, произведения и частного. Напомним, что если некоторая функция дифференцируема в точке x_0, то, по определению, она определена в окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечную производную.

Теорема 1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то для любых постоянных a и b функция $y = au(x) + bv(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0 и в этой точке*

$$(au + bv)' = au' + bv', \tag{1}$$

$$d(au + bv) = a\,du + b\,dv. \tag{1'}$$

Доказательство. Как обычно, положим

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0), \qquad \Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0).$$

Тогда, если $y = au(x) + bv(x)$ то, очевидно,

$$\Delta y = a\Delta u + b\Delta v.$$

Разделим это равенство почленно на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим формулу (1). Теорема 1 доказана.

Доказанное свойство операции дифференцирования называется *свойством линейности*.

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $y = u(x)v(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0 и в этой точке*

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{2}$$

$$d(uv) = v\,du + u\,dv. \tag{2'}$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 1. Тогда, если $y = u(x)v(x)$, то

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Разделим это равенство почленно на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим формулу (2). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то функция $y = u(x)/v(x)$ тоже дифференцируема в точке x_0 и в этой точке*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \tag{3}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{3'}$$

Доказательство. Если $y = u(x)/v(x)$, то

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}.$$

Разделим это равенство почленно на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим формулу (3). Теорема 3 доказана.

Примеры. Найдем производные функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Зная производные синуса и косинуса, по формуле дифференцирования частного получаем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.2. Производная сложной функции. Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена в окрестности точки x_0, а функция $y = f(u)$ определена в окрестности точки $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда, если $\varphi(x)$ непрерывна в x_0, а $f(u)$ непрерывна в u_0, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ определена в некоторой окрестности точки x_0, и поэтому можно говорить о дифференцируемости этой функции.

Теорема. *Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0). \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, то, согласно лемме 1 из п.1.2,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(u)\Delta u,$$

где функция $\alpha(u)$ непрерывна в точке u_0 и $\alpha(u_0) = 0$. Разделим это равенство почленно на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, считая, что $u = \varphi(x)$. Так как $\alpha(\varphi(x)) \to 0$ при $x \to x_0$, то в результате получим равенство

$$\frac{dy}{dx} = f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

Теорема доказана.

Формула (1) записывается более наглядно в дифференциалах:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Пример 1. $y = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Эта степенная функция определена для $x > 0$. Для этих x имеем: $y = e^{\alpha \ln x}$; Следовательно, $y = e^u$, где $u = \alpha \ln x$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом, степенная функция $y = x^\alpha$ дифференцируема в любой точке $x > 0$ и

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Рассмотрим случаи, когда степенная функция определена на более широком множестве.

Если $\alpha > 0$, то функция $y = x^\alpha$ определена и непрерывна (справа) в точке $x = 0$. Очевидно, если $0 < \alpha < 1$, то $y'_+(0) = +\infty$; если $\alpha = 1$, то $y'_+(0) = 1$; если же $\alpha > 1$, то $y'_+(0) = 0$.

Пусть теперь α такое, что степенная функция $y = x^\alpha$ определена и для $x < 0$. Если α такое, что функция нечетная, то для

$x < 0$ имеем: $y = -(-x)^\alpha$. Продифференцируем эту функцию как сложную функцию: сначала по $-x$, а затем $-x$ по x. Тогда

$$y' = -\alpha(-x)^{\alpha-1} \cdot (-1) = \alpha(-x)^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Если же α такое, что функция четная, то

$$y = (-x)^\alpha \quad \text{и} \quad y' = \alpha(-x)^{\alpha-1} \cdot (-1) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

во всех точках x, в которых определены x^α и $x^{\alpha-1}$.

Пример 2. Функции $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называются *гиперболическими синусом* и *косинусом* и обозначаются $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Найдем производные этих функций.

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x;$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x.$$

Отметим одно интересное свойство дифференциала, которое называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, то, по определению, в этой точке

$$dy = \frac{dy}{du}\,du,$$

где du — дифференциал независимого переменного.

С другой стороны, если, кроме того, функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi(x_0) = u_0$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и в этой точке

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\,dx.$$

А так как $\dfrac{du}{dx}\,dx = du$, то и в этом случае $dy = \dfrac{dy}{du}\,du$. Однако здесь du — дифференциал функции $u = \varphi(x)$.

Следовательно, дифференциал всегда равен произведению производной на дифференциал переменной, по которой берется производная. Причем эта переменная может быть как независимой, так и быть функцией другой переменной.

Пример 3. $y = \ln|x|$.

Если $x > 0$, то уже доказано, что $y' = 1/x$. А если $x < 0$, то

$$y' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, $(\ln|x|)' = 1/x$ для любого $x \neq 0$. Отсюда следует, что если функция $u(x)$ дифференцируема и $u(x) \neq 0$, то

$$d(\ln|u|) = \frac{du}{u} = \frac{u'}{u}\,dx.$$

Пример 4. $y = u^v$, где $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$. Так как $y = e^{v\ln u}$, то

$$y' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

В частности, если $y = x^x$, то $y' = x^x(\ln x + 1)$.

2.3. Производная обратимой функции. Как известно, если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ взаимно обратные, то

$$f(\varphi(y)) = y \quad \forall y \in D_\varphi.$$

Если предположить, что функции f и φ дифференцируемы, то, дифференцируя $f(\varphi(y))$ по правилу дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy} = 1, \qquad f' = \frac{1}{\varphi'}.$$

Получим эту формулу без предположения дифференцируемости функции f.

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, обратима на этой окрестности и непрерывна в точке x_0. Тогда, если обратная функция $x = \varphi(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и $\varphi'(y_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $y = f(x) \to y_0$ при $x \to x_0$, $x \in D_f$. Тогда по теореме о замене переменного под знаком предела получаем:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{y - y_0}{\varphi(y) - \varphi(y_0)} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что формула (1) остается справедливой и в тех случаях, когда $\varphi'(y_0) = \pm\infty$, если считать, что $1/(\pm\infty) = 0$.

Пример 1. $y = \arcsin x$, $x \in (-1; 1)$.

Данная функция является обратной к функции $x = \sin y$, $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Для этих функций выполнены все условия теоремы о производной обратимой функции. Следовательно,

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

А так как $\cos y > 0$ для любого $y \in (-\pi/2; \pi/2)$, то в этой формуле

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Следовательно,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 2. $y = \arccos x$, $x \in (-1; 1)$.

Эта функция является обратной к функции $x = \cos y$, $y \in (0; \pi)$, и выполнены все условия теоремы о производной обратной функции. Следовательно,

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

так как $\sin y > 0$ для любого $y \in (0; \pi)$. Следовательно,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 3. $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Эта функция является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\pi/2; \pi/2)$, и выполнены все условия доказанной выше теоремы, поэтому

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогично доказывается формула $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Пример 4. Производная функции, заданной параметрически. Пусть переменные x и y есть функции от t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{2}$$

и функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = t(x)$. Тогда функция $y = y(t(x))$ называется *функцией, заданной параметрически* уравнениями (2). Пусть все функции дифференцируемы и $x(t) \neq 0$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

2.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют n-е производные в точке x_0, то и любая функция вида $y = \alpha u + \beta v$, где α и β — некоторые постоянные, в точке x_0 имеет n-ю производную и*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{d^n u}{dx^n} + \beta \frac{d^n v}{dx^n},$$
$$d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha d^n u + \beta d^n v.$$

Пример 1. Найдем n-ю производную функции

$$y = x^3 + x^2 + x + 1,$$

Имеем:

$$y' = 3x^2 + 2x + 1, \quad y'' = 6x + 2, \quad y''' = 6$$

и $y^{(n)} = 0$, если $n > 3$.

Пример 2. Найдем вторую производную функции, заданной параметрически.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ и пусть существуют все необходимые производные. Тогда, как известно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'}.$$

Аналогично,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) \cdot \frac{dt}{dx},$$

и поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3}.$$

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют n-е производные в точке x_0, то и функция $y = uv$ в точке x_0 имеет n-ю производную и*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{1}$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k u \cdot d^{n-k} v, \tag{2}$$

где $u^{(0)} = u$, $d^0 u = u$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ причем, как обычно, $0! = 1$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать формулу (1). Докажем ее методом математической индукции. Для $n = 1$ формула (1) справедлива: $y' = uv' + u'v$. Пусть она справедлива для некоторого n. Докажем, что тогда она справедлива и для $n + 1$.

Согласно предположению,

$$y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}\right)'.$$

Отсюда получаем:

$$y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} =$$

$$= u^0 v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(n+1)} v^{(0)}.$$

Во второй сумме индекс суммирования k заменим на $k - 1$ и, соответственно, $k + 1$ на k. Тогда

$$y^{(n+1)} = u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)} v^{(0)},$$

а так как $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, то $y^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}$.

Теорема 2 доказана.

Формулы (1) и (2) называются *формулами Лейбница*.

Пример 3. Найдем n-ю производную функции $y = x^2 e^x$.

По формуле Лейбница получаем

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)}.$$

Если $n \geq 2$, то $y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{2} C_n^k (x^2)^{(k)} e^x = (C_n^0 x^2 + C_n^1 2x + C_n^2 2) e^x = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1))$.

Легко проверяется, что эта формула справедлива и для $n = 1$ и $n = 0$.

Как известно, дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности формы. Однако уже дифференциал второго порядка не обладает этим свойством.

Действительно, если $z = f(y)$, то

$$dz = f'(y)\,dy \quad \text{и} \quad d^2 z = f''(y)\,dy^2.$$

Если же $z = f(y)$ и $y = \varphi(x)$, то, как и выше, $dz = f'(y)\,dy$, однако

$$d^2 z = f''(y)\,dy^2 + f'(y)\,d^2 y,$$

где $d^2 y$ — второй дифференциал функции $y = \varphi(x)$.

§ 3. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

3.1. Теорема Ферма. Пусть задана функция f, и пусть $x_0 \in D_f$, где D_f — область определения функции f.

Определение 1. Точка $x_0 \in D_f$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) *функции* f, если существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что для любого $x \in O(x_0) \cap D_f$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ (соотв., $f(x) \ge f(x_0)$).

Заметим, что слово «локальный» для краткости часто опускается.

Определение 2. Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*, а ее значения в этих точках — *экстремальными значениями* (соотв., *локальными максимумами* или *локальными минимумами*).

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке x_0 и x_0 является ее точкой экстремума, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, так как она дифференцируема в точке x_0. Пусть, например, x_0 — точка максимума функции f. Тогда существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in O(x_0),$$

и поэтому если $x \in O(x_0)$ и $x < x_0$ (соотв., $x > x_0$), то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad (\text{соотв.}, \le 0).$$

Следовательно,

$$f'_-(x_0) \ge 0, \qquad f'_+(x_0) \le 0,$$

а так как эти односторонние производные равны производной $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$. Случай, когда x_0 — точка минимума, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

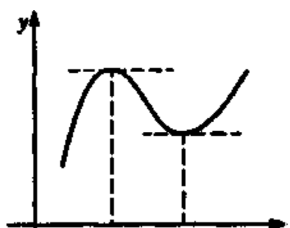

Рис. 3.6

Теорема Ферма имеет простую геометрическую интерпретацию: если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и x_0 — ее точка экстремума, то касательная к графику этой функции в точке x_0 параллельна оси Ox. (На рис. 3.6 x_1 — точка максимума, а x_2 — точка минимума.)

3.2. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Сначала докажем *теорему Ролля*, но прежде сформулируем одно определение.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$, если она определена на $(a;b)$ и в каждой его точке имеет конечную производную.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ принимает и наибольшее и наименьшее значения, а так как $f(a) = f(b)$, то одно из них она принимает в некоторой точке $\xi \in (a;b)$. Тогда из теоремы Ферма следует, что $f'(\xi) = 0$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы Ролля следует *теорема Лагранжа.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$ и найдем λ из условия $F(a) = F(b)$. Тогда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2}$$

Функция $F(x)$ при таком λ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует $\xi \in (a;b)$ такое, что $F'(\xi) = 0$. А так как $F'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(\xi) = \lambda$, т.е. выполняется равенство (1). Теорема 2 доказана.

Заметим, что коэффициент λ, определяемый по формуле (2), равен угловому коэффициенту хорды, проходящей через точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$. Следовательно, теорема Лагранжа утверждает существование точки, в которой касательная к графику функции f параллельна этой хорде.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности $\mathring{O}(x_0)$, то для любого $x \in \mathring{O}(x_0)$ существует ξ, лежащее строго между x и x_0 и такое, что*

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{3}$$

Доказательство. Если $x \in O(x_0)$ и $x > x_0$, то на отрезке $[x_0;x]$ функция f удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому существует $\xi \in (x_0;x)$, для которого выполняется равенство (3). Аналогично рассматривается случай $x < x_0$. Следствие 1 доказано.

Формула (3) называется *формулой Лагранжа* для конечных приращений или *формулой конечных приращений.*

Следствие 1 можно сформулировать несколько иначе.

Следствие 1'. *Если функция f непрерывна в $O(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{\circ}{O}(x_0)$, то $\forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ $\exists \Theta \in (0;1)$:*

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta \Delta x)\Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Следствие 2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a;b)$, то функция f постоянна на отрезке $[a;b]$.*

Это утверждение о постоянстве дифференцируемой функции следует из формулы Лагранжа для конечных приращений. Его очевидным обобщением является следующее утверждение о постоянстве непрерывной кусочно-дифференцируемой функции.

Определение 2. Функция называется *кусочно-дифференцируемой* на некотором промежутке, если она всюду, кроме конечного числа точек, имеет конечную производную.

Следствие 3. *Если функция непрерывна на некотором конечном или бесконечном промежутке и всюду, кроме конечного числа точек, имеет производную, равную нулю, то эта функция постоянна на рассматриваемом промежутке.*

В заключение докажем *теорему Коши.*

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$, то $g(b) \neq g(a)$ (по теореме Ролля). Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$ и найдем λ из условия $F(a) = F(b)$. Тогда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функция $F(x)$ при таком λ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует $\xi \in (a;b)$ такое, что $F'(\xi) = 0$. А так как $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, то $f'(\xi) = \lambda g'(\xi)$, т.е. выполняется равенство (4). Теорема 3 доказана.

Следствие 4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемы в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}(x_0)$, причем $g'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{O}(x_0)$, то для любого $x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ существует ξ, лежащее строго между x и x_0 такое, что*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

3.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет n-ю производную, а следовательно, и все производные до n-го порядка. Легко видеть, что многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

обладает следующим свойством:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Этот многочлен называется *многочленом Тейлора функции f в точке x_0*. Естественно предположить, что в окрестности точки x_0 он достаточно хорошо приближает функцию f. Чтобы оценить это приближение, рассмотрим разность

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

и изучим функцию $r_n(x)$. В этом случае равенство

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0, а функция $r_n(x)$ — *остаточным членом формулы Тейлора.*

Теорема. *Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 имеет непрерывную производную n-го порядка и $f^n(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}(x_0)$, то для любого $x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ существует ξ, лежащее строго между x и x_0 и такое, что справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{1}$$

Доказательство. Функции

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

удовлетворяют всем условиям следствия из теоремы Коши о среднем. Кроме того,

$$r_n^{(k)}(x_0) = 0, \quad \varphi^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Поэтому, если $x \in O(x_0)$ и, например, $x < x_0$, то существует $\xi_1 \in (x; x_0)$ такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}.$$

Аналогично,

$$\exists \xi_2 \in (\xi_1; x_0): \quad \frac{r_n'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} = \frac{r_n''(\xi_2)}{\varphi''(\xi_2)},$$

. . . .

$$\exists \xi_n \in (\xi_{n-1}; x_0): \quad \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)}.$$

Легко видеть, что

$$\varphi^{(n)}(x) = (n+1)!(x - x_0),$$
$$r_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0).$$

К этим функциям на отрезке $[\xi_n; x_0]$ снова применим теорему о среднем:

$$\exists \xi \in (\xi_n; x_0): \quad \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Следовательно, существует $\xi \in (x; x_0)$ такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

т.е.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Аналогично рассматривается и случай $x > x_0$. Теорема доказана.

Равенство (1) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Заметим, что формула (1) справедлива и для $x = x_0$, если считать, что остаточный член равен нулю при $x = x_0$. В частном случае, когда $x_0 = 0$, формула Тейлора иногда называется *формулой Маклорена.*

3.4. Разложение по формуле Тейлора основных элементарных функций. Разложим по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$, т.е. по формуле Маклорена, функции

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad (1+x)^\alpha, \quad \ln(1+x).$$

1. Пусть $f(x) = e^x$ и $x_0 = 0$.

Эта функция имеет производную любого порядка в любой точке $x \in \mathbb{R}$, и $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, при любом n в любой окрестности точки $x_0 = 0$ выполнены все условия теоремы из п.3.3., и поэтому для любого x существует $\Theta \in (0;1)$, для которого справедлива формула

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\Theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Пусть $f(x) = \sin x$ и $x_0 = 0$. Так как

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

и, следовательно,

$$f^{(m)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot m\right)$$

для любого m, то $f^m(0) = \sin(m\pi/2)$, и поэтому $f^m(0) = 0$ для четных $m = 2k$ и $f^m(0) = (-1)^k$ для нечетных $m = 2k+1$.

Таким образом, для любого x существует $\Theta \in (0;1)$, для которого справедлива формула

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \cos \Theta x \cdot x^{2n+3}.$$

Аналогично,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cos \Theta x \cdot x^{2n+2}.$$

3. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$ и $x_0 = 0$.

Так как $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ и, вообще,

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

то $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$ и, вообще,

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\forall x \ \exists \Theta \in (0;1)$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

Введем обозначение

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!},$$

где $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + C_\alpha^{n+1}(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

4. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$ и $x_0 = 0$.

Так как $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$ и, вообще,

$$f^{(k)}(x) = (-1)\ldots(-k+1)(1+x)^{-k},$$

то $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и, вообще, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\forall x > -1$ $\exists \Theta \in (0;1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{n+1}(1+\Theta x)^{-n-1}x^{n+1}.$$

§ 4. Первообразные и неопределенные интегралы

4.1. Определения. В этом параграфе рассмотрим задачу отыскания функции по ее производной. Сформулируем соответствующие определения, некоторые из которых известны еще из школьного курса математики.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* (или *точной первообразной*) для функции $f(x)$ на промежутке Δ, если $F(x)$ дифференцируема на Δ и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

Очевидно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и любая функция вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$. Из условия постоянства дифференцируемой функции следует, что других первообразных на промежутке Δ функция $f(x)$ не имеет.

Действительно, если $\Phi(x)$ — некоторая другая первообразная для $f(x)$ на Δ, то функция $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ постоянна на Δ, так как $\varphi'(x) \equiv 0$ на Δ. Следовательно, существует постоянная C такая, что $\Phi(x) = F(x) + C$ на Δ.

Таким образом, *первообразная данной функции на промежутке определяется с точностью до аддитивной постоянной.*

Обобщим понятие первообразной на случай кусочно-дифференцируемых функций.

Определение 2. Функция $F(x)$ называется *первообразной* (или *обобщенной первообразной*) для функции $f(x)$ на промежутке Δ, если на Δ функция $F(x)$ непрерывна, кусочно-дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек.

Лемма. *Если функция $f(x)$ на промежутке Δ имеет первообразную $F(x)$ (точную или обобщенную), то любая ее первообразная на Δ имеет вид $F(x)+C$, где C — некоторая постоянная.*

Это утверждение следует из условия постоянства непрерывной кусочно-дифференцируемой функции.

Определение 3. Любая первообразная функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции f называется *интегрированием функции* f.

Таким образом, если $F(x)$ — какая-то первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 1. Проинтегрируем функцию $f(x)=x^2$.

Очевидно, функция $F(x)=(1/3)x^3$ является первообразной для $f(x)=x^2$ на $\mathbb{R}$. Поэтому

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 2. Проинтегрируем функцию $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

Очевидно, функция $F(x)=|x|$ является первообразной для $f(x)=\operatorname{sgn} x$ на $\mathbb{R}$, так как $F(x)=|x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и всюду, кроме $x=0$, имеет производную $F'(x)=\operatorname{sgn} x$. Следовательно,

$$\int \operatorname{sgn} x\,dx = |x|+C,$$

где C — произвольная постоянная.

4.2. Основные свойства интегралов. Простой переформулировкой определения первообразных являются следующие два утверждения:

1. *Если функция $f(x)$ на промежутке Δ имеет первообразную (точную или обобщенную), то*

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

на Δ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек.

2. *Если функция $F(x)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема на промежутке Δ, то она является первообразной для функции $F'(x)$ на промежутке Δ, и поэтому*

$$\int F'(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

Заметим, здесь функция $F'(x)$ может быть неопределенной в конечном числе точек. Если необходимо, в этих точках ее можно доопределить произвольным образом.

Из свойства аддитивности производной следует *свойство аддитивности интеграла*:

3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке Δ имеют первообразные, то функции $f(x) \pm g(x)$ на Δ тоже имеют первообразные и*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Таким же очевидным является и следующее *свойство однородности неопределенного интеграла*:

4. *Если функция $f(x)$ на промежутке Δ имеет первообразную, то для любого числа k функция $kf(x)$ на Δ тоже имеет первообразную, причем, если $k \neq 0$, то*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Если же $k = 0$, то $\int 0 \cdot f(x)\,dx = C$, где C — произвольная постоянная. Из аддитивности и однородности следует *свойство линейности неопределенного интеграла*:

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке Δ имеют первообразные, то для любых чисел α и β функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ на Δ тоже имеет первообразную, причем, если $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, то

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Пример. Проинтегрируем функцию

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta \operatorname{sgn} x,$$

где α и β — некоторые числа.

Согласно свойствам неопределенного интеграла получаем:

$$\int (\alpha x^2 + \beta \operatorname{sgn} x)\,dx = \alpha \int x^2\,dx + \beta \int \operatorname{sgn} x\,dx + C =$$
$$= \frac{\alpha}{3}x^3 + \beta|x| + C.$$

4.3. Таблица неопределенных интегралов. Из таблицы производных элементарных функций следует *таблица неопределенных интегралов*:

1. $\int 0\,dx = C$;
2. $\int x^\alpha = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
6. $\int a^x\,dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C$;
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

Все эти формулы справедливы на промежутках, на которых определены подынтегральные функции.

Заметим, что производная элементарной функции является элементарной функцией. Однако первообразная элементарной функции не всегда является элементарной функцией. Если же интеграл от некоторой функции является элементарной функцией, то говорят, что он вычисляется.

4.4. Методы интегрирования. В этом пункте, для простоты, будем рассматривать только точные первообразные.

Теорема 1. *Пусть функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы на промежутке Δ. Тогда, если на Δ функция $g(x)f'(x)$ имеет первообразную, то функция $f(x)g'(x)$ тоже имеет первообразную и*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{1}$$

Действительно, производная от правой части этого равенства равна $f(x)g'(x)$.

Формула (1) называется *формулой интегрирования по частям* и часто записывается в таком виде:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Пример 1. Вычислим интеграл $\int \ln x\,dx$.

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Для этого положим $u = \ln x$ и $dv = dx$. Тогда $v = x$ и $du = (1/x)dx$, и поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Пример 2. Вычислим интеграл $\int xe^x\,dx$.

Положим $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = e^x$, и поэтому

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Теорема 2. *Пусть функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ определены на некоторых промежутках и такие, что имеет смысл композиция $f(\varphi(x))$, и пусть, кроме того, функция $\varphi(x)$ дифференцируема. Тогда, если функция $F(y)$ — первообразная для функции $f(y)$, то функция $F(\varphi(x))$ — первообразная для функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.*

Это утверждение является непосредственным следствием теоремы о производной сложной функции.

Таким образом, если выполнены условия теоремы 2, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy, \tag{2}$$

где $y = \varphi(x)$. Аналогично, если функция $x = \varphi^{-1}(y)$ дифференцируема, а функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет первообразную, то функция $f(y)$ тоже имеет первообразную и

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx, \tag{3}$$

где $x = \varphi^{-1}(y)$.

Метод интегрирования, основанный на формуле (2), называется *методом подстановки*, а метод, основанный на формуле (3), — *методом замены переменной интегрирования*.

Пример 3. Вычислим интеграл от $\operatorname{ctg} x$.

Так как

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx,$$

то, полагая $y = \sin x$, по формуле (2) получаем

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Пример 4. Вычислим интеграл от $(x^2 + a^2)^{-1/2}$, $a > 0$.

Сделаем замену переменной интегрирования $x = a\operatorname{sh} t$. Тогда

$$\int (x^2 + a^2)^{-1/2}\,dx = \int (a^2\operatorname{ch}^2 t)^{-1/2} a\operatorname{ch} t\,dt = \int dt = t + C,$$

где t находится из уравнения $\operatorname{sh} t = x/a$. Решая его, находим

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a.$$

Следовательно,

$$\int (x^2 + a^2)^{-1/2}\, dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

4.5. Интегрирование рациональных функций. Примем без доказательства следующее утверждение:

Любой многочлен n-й степени с действительными коэффициентами однозначно раскладывается на множители вида $(x-a)^k$ и $((x-\alpha)^2+\beta^2)^k$ где $\beta > 0$, сумма степеней которых равна n.

Это утверждение является следствием основной теоремы алгебры, которая будет доказана в теории функций комплексного переменного (см. § 6 гл. 6).

Напомним, что рациональной функцией или дробью называется функция вида $Q_m(x)/P_n(x)$, где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ — многочлены степени m и n. Если, кроме того, $m < n$, то дробь называется *правильной*.

При интегрировании рациональных функций поступают следующим образом: сначала выделяют *целую часть*, затем получившуюся правильную дробь методом неопределенных коэффициентов представляют в виде суммы *простых дробей*, т.е. дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}.$$

Легко видеть, что при интегрировании дробей вида $A/(x-a)^k$ может получиться или дробь того же вида, или функция $A\ln|x-a|$. Можно показать, что первообразная любой простой дроби другого вида является линейной комбинацией дробей того же вида и, может быть, функцией $\ln((x-\alpha)^2+\beta^2)$ и $\operatorname{arctg}[(x-\alpha)/\beta]$. (Доказать это утверждение в качестве упражнения.)

Пример 1. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

По формуле интегрирования по частям получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 2. Вычислим интеграл от функции

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x}{(x^2+1)^2}.$$

Так как

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2},$$

то

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

и, следовательно (см. пример 1),

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x}{x^2+1} + C.$$

Глава 4. Исследование функций с помощью производных

§ 1. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

1.1. Неопределенности вида 0/0. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на интервале $(a;b)$, имеют конечные или бесконечные пределы при $x \to a$ (или при $x \to b$). Пусть, кроме того, $g(x) \neq 0$ на $(a;b)$. При этих условиях рассмотрим предел отношения $f(x)/g(x)$ при $x \to a$ (соотв., при $x \to b$).

Если пределы A и B функций $f(x)$ и $g(x)$ конечные и $B \neq 0$, то, как известно, предел отношения $f(x)/g(x)$ существует и равен A/B. Это утверждение естественным образом обобщается, если считать, что

$$\frac{A}{0} = \infty \text{ для любого } A \neq 0,$$
$$\frac{\infty}{B} = \infty \text{ для любого } B \neq \infty,$$
$$\frac{0}{B} = 0 \text{ для любого } B \neq 0,$$
$$\frac{A}{\infty} = 0 \text{ для любого } A \neq \infty.$$

Однако если $A = 0$ и $B = 0$ или $A = \infty$ и $B = \infty$, то, зная только A и B, относительно предела отношения нельзя сказать ничего определенного, поэтому говорят, что в этих случаях имеют место неопределенности вида $0/0$ или ∞/∞.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ на интервале $(a;b)$ дифференцируемы, $g'(x) \neq 0$ и $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to b$ (или при $x \to a$). Тогда, если при $x \to b$ (соотв., при $x \to a$) отношение производных $f'(x)/g'(x)$ имеет конечный или бесконечный предел, то справедлива формула*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

или, соответственно,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2}$$

Заметим, что здесь возможны два случая: $b \neq +\infty$ и $b = +\infty$. Если $b \neq +\infty$, то пределы в формуле (1) — это пределы по множеству $(a;b)$, т.е. когда $x \to b-0$. Аналогичные замечания следует сделать и относительно формулы (2).

Доказательство. В случае, когда $b \neq +\infty$, доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = b$, положив $f(b) = g(b) = 0$, и рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$x_n \in (a,b) \quad \forall n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b. \tag{3}$$

Тогда на любом отрезке $[x_n;b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши, и поэтому

$$\forall n \quad \exists \xi_n \in (x_n;b): \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

Так как это равенство справедливо для любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условиям (3), и предел отношения производных существует, то формула (1) в случае $b \neq +\infty$ доказана. Аналогично доказывается и формула (2) в случае $a \neq -\infty$.

В случае, когда $b = +\infty$, не ограничивая общности, можно считать, что $a \geq 1$. Тогда, положив $x = 1/t$, замечаем, что функции

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ и } \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in \left(0;\frac{1}{a}\right),$$

удовлетворяют всем условиям теоремы в случае, когда $t \to +0$. Действительно,

$$\varphi(t) \to 0 \quad \text{и} \quad \psi(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0,$$

$$\varphi'(t) = f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad \psi'(t) = g'(x) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

и, наконец, предел отношения $\varphi'(t)/\psi'(t)$ при $t \to +0$ существует, причем

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Аналогично доказывается и формула (2) в случае, когда $a = -\infty$. Теорема доказана.

Формулы (1) и (2) называются *правилами Лопиталя раскрытия неопределенностей вида* 0/0.

Пример 1. Найти предел функции

$$f(x) = \operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln(\sqrt{1+2x} - \sin x) \text{ при } x \to 0.$$

Решение. Здесь возникает неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Но так как

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)}{\sin^2 x},$$

то она сводится к неопределенности вида 0/0. Для ее вычисления применим правило Лопиталя

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)^{-1/2} - \cos x}{2 \sin x \cdot \cos x \cdot (\sqrt{1+2x} - \sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)^{-1/2} - \cos x}{\sin 2x}.$$

Для вычисления последнего предела снова воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-(1+2x)^{-3/2} + \sin x}{2 \cos 2x} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти предел функции

$$g(x) = (\sqrt{1+2x} - \sin x)^{\operatorname{ctg}^2 x} \text{ при } x \to 0.$$

Решение. Здесь возникает неопределенность вида 1^∞. Она сводится к неопределенности вида $0\cdot\infty$, так как $g(x) = \exp f(x)$, где $f(x)$ — функция, рассмотренная в примере 1. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = e^{-1/2}.$$

Пример 3. Найти предел функции

$$f(x) = x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Решение. Очевидно,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^{-\beta})}{x^{-\alpha}}.$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\beta x^{-\beta-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{\beta}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < \beta, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > \beta. \end{cases}$$

1.2. Неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на конечном или бесконечном интервале $(a; b)$, и пусть $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to b$ (или при $x \to a$). Здесь, как и в пункте 1.1, возможны два случая: $b \neq +\infty$ и $b = +\infty$ (соотв., $a \neq -\infty$ и $a = -\infty$).

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ на интервале $(a; b)$ дифференцируемы, $g'(x) \neq 0$ и $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to b$ (или при $x \to a$). Тогда, если при $x \to b$ (соотв., при $x \to a$) отношение производных $f'(x)/g'(x)$ имеет конечный или бесконечный предел, то справедлива формула*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1}$$

или, соответственно,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{2}$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k,$$

и пусть последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$x_n\in(a;b)\quad\forall n\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}x_n=b.$$

По условию, предел k может быть как конечным, так и бесконечным: $k=-\infty$ или $k=+\infty$.

Если k — число, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\eta_\varepsilon\in(a;b)$ такое, что

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\varepsilon\quad\forall x\in(\eta_\varepsilon;b).\tag{3}$$

С другой стороны, существует N_ε такое, что

$$x_n\in(\eta_\varepsilon;b)\quad\forall n\geq N_\varepsilon.$$

На любом отрезке $[\eta_\varepsilon;x_n]$, $n\geq N_\varepsilon$, функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем, поэтому

$$\exists\xi_n\in(\eta_\varepsilon;x_n):\quad\frac{f(x_n)-f(\eta_\varepsilon)}{g(x_n)-g(\eta_\varepsilon)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Отсюда и из неравенства (3) следуют неравенства

$$k-\varepsilon<\frac{f(x_n)-f(\eta_\varepsilon)}{g(x_n)-g(\eta_\varepsilon)}<k+\varepsilon\quad\forall n\geq N_\varepsilon.\tag{4}$$

Так как последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ бесконечно большие, то

$$\frac{f(x_n)-f(\eta_\varepsilon)}{g(x_n)-g(\eta_\varepsilon)}\sim\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

и поэтому эти отношения имеют одни и те же частичные пределы. Следовательно, их нижние и, соответственно, верхние пределы равны. Тогда из неравенств (4) следует, что нижний и верхний пределы отношения $f(x_n)/g(x_n)$ при $n\to\infty$ удовлетворяют неравенствам

$$k-\varepsilon\leq\varliminf_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\leq\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\leq k+\varepsilon$$

для любого $\varepsilon>0$. Следовательно, эти пределы равны, и поэтому предел отношения $f(x_n)/g(x_n)$ при $n\to\infty$ существует и равен k.

Формула (1) в случае, когда k — число, доказана.

Если теперь $k = +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta_\varepsilon \in (a;b)$ такое, что

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \varepsilon \quad \forall x \in (\eta_\varepsilon; b).$$

Тогда

$$\frac{f(x_n) - f(\eta_\varepsilon)}{g(x_n) - g(\eta_\varepsilon)} > \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon,$$

и поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \geq \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = +\infty.$$

Формула (1) в случае, когда $k = +\infty$, доказана. Случай, когда $k = -\infty$, рассматривается аналогично.

Таким образом, формула (1) доказана во всех случаях. Формула (2) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Формулы (1) и (2) называются *правилами Лопиталя раскрытия неопределенностей вида* ∞/∞.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0.$

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$. Сначала приведем ее к неопределенности вида ∞/∞ и затем применим правило Лопиталя. Таким образом,

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$

Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1,\ \forall \alpha.$

Решение. Для $\alpha < 0$ это утверждение очевидное. Если $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, то, применяя n раз правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x(\ln a)^n} = 0$$

Если же α нецелое, то

$$0 < \frac{x^\alpha}{a^x} \le \frac{x^{[\alpha]+1}}{a^x} \quad \forall x > 1,$$

где $[\alpha]$ — целая часть α. Отсюда следует, что предел отношения x^α/a^x при $x \to +\infty$ равен нулю для любого α и любого $a > 1$.

Заметим, что предел отношения функций может существовать и в тех случаях, когда предел отношения производных не существует. Например,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Однако предел отношения производных

$$\frac{1 - \cos x}{2 - \sin x}$$

не существует при $x \to +\infty$.

§ 2. Асимптотические разложения по формуле Тейлора

2.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. В п.3.3 гл. 3 доказано, что если функция $f(x)$ $n-1$ раз дифференцируема на интервале $(a;b)$ и имеет n-ю производную на интервалах $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, то для любого $x \in (a,b)$ существует $\theta \in (0;1)$ такое, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta\Delta x)(x - x_0)^n, \qquad (1)$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Формула (1), которая называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, доказана при минимальных требованиях на функцию $f(x)$. Если, дополнительно, существует $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \alpha_n(x)(x - x_0)^n. \qquad (2)$$

где $\alpha_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_0 + \theta\Delta x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Очевидно, если $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\alpha_n(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и из (2) следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \to x_0. \qquad (3)$$

Асимптотическое равенство (3) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.* Заметим, что в нее входит только $f^{(n)}(x_0)$, а при доказательстве предполагалось, что $f^{(n)}(x)$ существует на $(a;b)$ и непрерывна в точке x_0. Докажем равенство (3) при минимальных требованиях на функцию $f(x)$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную n-го порядка, то для $f(x)$ справедливо асимптотическое равенство* (3).

Доказательство. Прежде всего заметим: чтобы функция $f(x)$ имела $f^{(n)}(x_0)$, она должна быть $n-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, для $f(x)$ в точке x_0 можно написать многочлен Тейлора n-го порядка:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Очевидно, если $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, то

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Поэтому, применяя $n-1$ раз правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0}.$$

А так как $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, то последний предел, по определению производной, равен $r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Следовательно,

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Теорема доказана.

2.2. Единственность асимптотического разложения по степеням $x - x_0$ при $x \to x_0$. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;x_0)$ (или на $(x_0;b)$). Тогда асимптотическое равенство

$$f(x) = \sum_{k=p}^{q} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^q) \quad \text{при} \quad x \to x_0, \tag{1}$$

где p и q — целые числа, $p \le q$, а a_k — некоторые числа, называется *асимптотическим разложением функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$ при $x \to x_0$.*

Аналогично, если функция $f(x)$ определена на интервале $(a;+\infty)$ (или на $(-\infty;a)$), то асимптотическое равенство

$$f(x) = \sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^q}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty \tag{2}$$

(соотв., при $x \to -\infty$) называется *асимптотическим разложением функции* $f(x)$ *по степеням* x *при* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Теорема 1. *Для любого заданного целого* q *функция* $f(x)$, $x \in (a; x_0)$, *может иметь единственное асимптотическое разложение вида* (1).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ при заданном q имеет другое асимптотическое разложение вида (1):

$$f(x) = \sum_{k=p_1}^{q} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^q) \tag{3}$$

при $x \to x_0$. Можно считать, что $p = p_1$, так как, если, например, $p < p_1$, то положим $b_k = 0$ для $k < p_1$. Тогда из равенств (1) и (3) получаем

$$\sum_{k=p}^{q} (a_k - b_k)(x - x_0)^k = o((x - x_0)^q). \tag{4}$$

В случае, когда $p < 0$, умножим равенство (4) на $(x - x_0)^{-p}$ и перейдем к пределу при $x \to x_0$. В результате получим $a_p - b_p = 0$. Таким образом последовательно получаем равенства $a_k - b_k = 0$ для любого отрицательного k. Если $q < 0$, то теорема доказана, а если $q \geq 0$, то из равенства (4) следует, что

$$\sum_{k=0}^{q} (a_k - b_k)(x - x_0)^k = o((x - x_0)^q) \quad . \tag{5}$$

при $x \to x_0$.

Из равенства (5) в пределе при $x \to x_0$ получаем $a_0 = b_0$. Если $q = 0$, то теорема доказана, а если $q \geq 1$, то

$$\sum_{k=1}^{q} (a_k - b_k)(x - x_0)^{k-1} = o((x - x_0)^{q-1})$$

при $x \to x_0$. Отсюда, как и выше, получаем $a_1 = b_1$, и т.д. Теорема доказана.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого целого* q *функция* $f(x)$, $x \in (a; +\infty)$, *может иметь единственное асимптотическое разложение вида* (2).

Заметим, что асимптотические разложения (1) и (2) обладают одним характерным свойством: в сумме, стоящей в правой части равенства, каждое следующее слагаемое есть o-малое от предыдущего. В теории асимптотических разложений это свойство является определяющим. Здесь мы не будем развивать эту теорию в общем виде, а ограничимся лишь рассмотрением асимптотических разложений, которые получаются из формулы Тейлора.

Следствие. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную n-го порядка и*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \tag{6}$$

при $x \to x_0$, то асимптотическое равенство (6) *является формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0, т.е.*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

2.3. Асимптотические разложения по формуле Тейлора простейших элементарных функций. В п. 3.4 гл. 3 были приведены формулы Тейлора в точке $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа для функций

$$y = e^x, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \ln(1+x), \quad y = (1+x)^\alpha.$$

Из этих формул получаются (см. п.6.1) следующие асимптотические разложения по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано):

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \tag{1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k)!} + o(x^{2n+2}), \tag{2}$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n+1}), \tag{3}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \tag{4}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \tag{5}$$

при $x \to 0$. Для $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем формулу

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

которая является частным случаем формулы бинома Ньютона. Если $\alpha = -1$, то

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{6}$$

при $x \to 0$.

Получим некоторые формулы, пользуясь теоремой о единственности асимптотического разложения по степеням x.

Так как

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

то

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x_2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x_n + o(x^n) \tag{7}$$

при $x \to 0$. Из теоремы о единственности асимптотического разложения следует, что последняя формула является формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $y = 1/(1-x)$. Заметим, что формула (6) получается из формулы (7) заменой x на $-x$.

Аналогично заменой x на $-x$ в формуле (1) получаем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $y = e^{-x}$

$$e^{-x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \tag{8}$$

при $x \to 0$. Из равенств (1) и (8) почленным сложением и вычитанием получаем формулы Тейлора для $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \tag{9}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{10}$$

при $x \to 0$. Заметим, что в (9) вместо $o(x^{2n})$ написано $o(x^{2n+1})$, так как коэффициент при x^{2n+1} равен нулю. По этой же причине и в (10) вместо $o(x^{2n+1})$ написано $o(x^{2n+2})$.

Выведем еще формулу Тейлора в точке $x_0 = 0$ для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Из равенства (6) заменой x на x^2 получаем:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}) \tag{11}$$

при $x \to 0$. Далее, так как $f(0) = 0$ и

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$

то

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!, \quad f^{(2k)}(0) = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \tag{12}$$

при $x \to 0$.

Выше с помощью теоремы о единственности асимптотического разложения по степеням x получены формулы Тейлора (7)–(12) для соответствующих функций. Таким образом можно получить асимптотические разложения, которые не будут формулами Тейлора. Например, заменой x на $x^{1/3}$ из формулы (1) получаем асимптотическое разложение:

$$\exp x^{1/3} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k/3}}{k!} + o(x^{n/3})$$

при $x \to 0$. Аналогично из формулы (2) при $n = 1$ следует, что

$$\sin x^{1/3} = x^{1/3} - \frac{x}{6} + o(x^{4/3}) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Если же в (4) переменную x заменить на $-1/x$, то получим асимптотическое разложение функции $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ при $x \to \pm\infty$:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ при } x \to \pm\infty.$$

§ 3. Условия монотонности и выпуклости дифференцируемых функций. Экстремумы и точки перегиба

3.1. Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемых функций. Как известно (см. п.3.2 гл.3), имеет место следующий *критерий постоянства дифференцируемой функции*:

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, то $f(x)$ постоянна на $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ на $(a; b)$.

Сформулируем и докажем *критерий возрастания* (*убывания*) *дифференцируемой функции.*

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ (соотв., $f'(x) \leq 0$) на $(a;b)$.*

Доказательство. Если $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, то для любых x и $x+\Delta x$ из $(a;b)$ разность $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ имеет тот же знак, что и Δx, и поэтому всегда $\Delta f/\Delta x \geq 0$. Отсюда в пределе при $\Delta x \to 0$ следует, что $f'(x) \geq 0$. Аналогично, если $f(x)$ убывает на $(a;b)$, то $\Delta f/\Delta x \leq 0$, и поэтому $f'(x) \leq 0$ на $(a;b)$.

Наоборот, для любых x и $x+\Delta x$ из $(a;b)$, по теореме Лагранжа, существует ξ такое, что $\Delta f = f'(\xi)\Delta x$. Поэтому, если $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) на $(a;b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$. Теорема 1 доказана.

В заключение докажем *достаточное условие строгого возрастания* (*убывания*) *дифференцируемой функции.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ дифференцируема и $f'(x) > 0$ (< 0) на $(a;b)$, то она строго возрастает (убывает) на $(a;b)$.*

Доказательство. По теореме Лагранжа, для любых x и $x+\Delta x$ из $(a;b)$ существует ξ такое, что

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x.$$

Отсюда следует, что если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ строго возрастает, а если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ строго убывает на $(a;b)$. Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается и следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ (на $(a;b]$ или $[a;b)$), дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ (< 0) на $(a;b)$, то она строго возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$ (соотв., на $(a;b]$ или $[a;b)$).*

Заметим, что условие: $f'(x) > 0$ на $(a;b)$, являясь достаточным, не является необходимым для строгого возрастания дифференцируемой функции $f(x)$ на $(a;b)$. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0) = 0$.

3.2. Необходимое и достаточные условия экстремума функции. Точки экстремума и экстремальные значения функции (локальные минимумы и локальные максимумы) определялись в § 3 гл. 3. Там же была доказана теорема Ферма:

Если функция $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема и x_0 является точкой экстремума для $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Таким образом, для дифференцируемой функции $f(x)$ условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым для того, чтобы точка x_0 была точкой экстремума.

Заметим, что условие $f'(x_0) = 0$, являясь необходимым, не является достаточным для того, чтобы точка x_0 была экстремальной для $f(x)$. Например, для $f(x) = x^3$ имеем: $f'(0) = 0$, но точка $x_0 = 0$ не является экстремальной.

Определение 1. Точка x_0 называется *стационарной точкой функции* $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Если же $f'(x_0) > 0$ (< 0), то x_0 называется *точкой возрастания* (*убывания*) *функции* $f(x)$.

Из теоремы Ферма следует, что точки экстремумов данной функции следует искать среди стационарных точек и точек, в которых нет производной.

Определение 2. Точка $x_0 \in D_f$ называется *точкой строгого максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$\forall x \in \overset{\bullet}{O}(x_0) \cap D_f \quad f(x) < f(x_0) \quad (\text{соотв., } f(x) > f(x_0)).$$

Точки строгого максимума и минимума функции называются *точками строгого экстремума* этой функции.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$ и дифференцируема на интервалах $(a; x_0)$ и $(x_0; b)$. Тогда, если $f'(x) > 0$ на $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0; b)$, то x_0 — точка строгого максимума, а если $f'(x) < 0$ на $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0; b)$, то x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$.*

Доказательство. По теореме 3 из п. 3.1, если $f'(x) > 0$ на $(a; x_0)$, то $f(x)$ строго возрастает на промежутке $(a; x_0]$, и поэтому $f(x) < f(x_0)$ для любого $x \in (a; x_0)$. Аналогично, если $f'(x) < 0$ на $(x_0; b)$, то $f(x) < f(x_0)$ для любого $x \in (x_0; b)$.

Первое утверждение доказано, второе доказывается аналогично. Теорема 1 доказана.

Доказанную теорему образно формулируют следующим образом: *Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума, а если — с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$* (рис. 4.1 и 4.2).

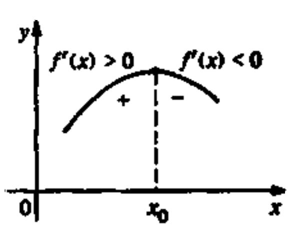

Рис. 4.1

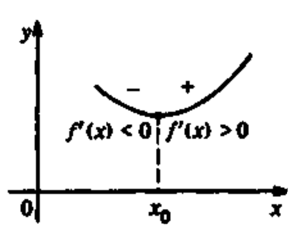

Рис. 4.2

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную 2-го порядка. Тогда, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$ (< 0), то x_0 — точка строгого минимума (максимума) функции $f(x)$.*

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{1}{2}f''(x_0) + \alpha(x)\right)(x - x_0)^2,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Если $f''(x_0) > 0$, то $\exists O(x_0)$: $\forall x \in O(x_0)$ $\frac{1}{2}f''(x_0) + \alpha(x) > 0$, и поэтому $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$. Следовательно, x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума функции $f(x)$. Теорема 2 доказана.

3.3. Интервалы выпуклости. Из рассмотрения графика функции $y = \sin x$ замечаем, что на интервале $(0;\pi)$ он является выпуклым вверх, на интервале $(-\pi;0)$ — выпуклым вниз, а в точке $x = 0$ он перегибается через касательную. Чтобы иметь возможность работать с этими понятиями, дадим им точные определения.

Определение. Функция $f(x)$, $x \in (a,b)$, называется *выпуклой вниз на интервале* $(a;b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \qquad (1)$$

Если же выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \ge \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \qquad (2)$$

то функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх на интервале* $(a;b)$.

В этом случае интервал $(a;b)$ называется *интервалом выпуклости вниз* (соотв., *вверх*) *функции* $f(x)$.

Условия (1) и (2) означают, что любая точка дуги M_1M_2 графика функции $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, лежит не выше и, соответственно, не ниже хорды M_1M_2 (рис. 4.3 и 4.4).

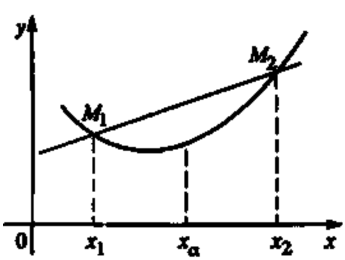

Рис. 4.3

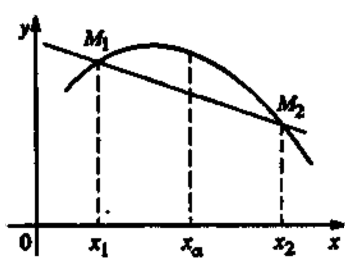

Рис. 4.4

Если в (1) (соотв., в (2)) для $x_1 \ne x_2$ стоит строгое неравенство, то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой вниз* (соотв., *вверх*) *на интервале* $(a;b)$, а интервал $(a;b)$ называется *интервалом строгой выпуклости вниз* (*вверх*) *функции* $f(x)$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)$ убывает (возрастает) на $(a;b)$, то $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на $(a;b)$. Если же $f'(x)$ строго убывает (возрастает) на $(a;b)$, то $f(x)$ строго выпукла вверх (вниз) на $(a;b)$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in (a;b)$ и, для определенности, $x_1 < x_2$. Пусть, далее, α_1, α_2 — положительные числа, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тогда точка $x_\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ удовлетворяет неравенствам: $x_1 < x_\alpha < x_2$.

По теореме о среднем Лагранжа имеем:

$$\exists \xi_1 \in (x_1; x_\alpha): \quad f(x_\alpha) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_\alpha - x_1),$$
$$\exists \xi_2 \in (x_\alpha; x_2): \quad f(x_2) - f(x_\alpha) = f'(\xi_2)(x_2 - x_\alpha),$$

Первое равенство умножим на α_1, второе — на α_2, а затем из первого вычтем второе. В результате получим равенство:

$$f(x_\alpha) - \alpha_1 f(x_1) - \alpha_2 f(x_2) = f'(\xi_1)\alpha_1(x_\alpha - x_1) - f'(\xi_2)\alpha_2(x_2 - x_\alpha). \quad (3)$$

Заметим, что

$$x_\alpha - x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_1 = -\alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_2(x_2 - x_1)$$

и, аналогично, $x_2 - x_\alpha = \alpha_1(x_2 - x_1)$, поэтому

$$f(x_\alpha) - \alpha_1 f(x_1) - \alpha_2 f(x_2) = \alpha_1\alpha_2(x_2 - x_1)(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)),$$

где $\xi_1 < \xi_2$. Следовательно, если $f'(x)$ убывает (возрастает), то

$$f(x_\alpha) - \alpha_1 f(x_1) - \alpha_2 f(x_2) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Это и доказывает, что функция $f(x)$ выпукла вверх (соотв., вниз) на интервале $(a;b)$.

Аналогично доказывается и второе утверждение. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x) \leq 0$ (≥ 0) на интервале $(a;b)$, то $f(x)$ выпукла вверх (соотв., вниз) на $(a;b)$. Если же $f''(x) < 0$ (> 0) на $(a;b)$, то $f(x)$ строго выпукла вверх (соотв., вниз) на $(a;b)$.*

3.4. Точки выпуклости и точки перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке она имеет касательную.

Определение 1. Если существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что точки графика функции $y = f(x)$ при $x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ лежат выше (ниже) касательной, то x_0 называется *точкой выпуклости вниз (вверх) функции $f(x)$*.

Например, для функции $y = x^2$ любая точка $x \in \mathbb{R}$ является точкой выпуклости вниз. Для функции $y = \sin x$ любая точка

$x \in (\pi; 0)$ есть точка выпуклости вниз, а любая точка $x \in (0; \pi)$ — точка выпуклости вверх.

Определение 2. Если существует окрестность $O(x_0) = (a; b)$ точки x_0 такая, что точки графика функции $y = f(x)$ при $x \in (a; x_0)$ лежат по одну сторону от касательной, а при $x \in (x_0; b)$ — по другую, то x_0 называется *точкой перегиба функции* $f(x)$.

Например, точка $x = 0$ является точкой перегиба для функций $y = x^3$, $y = x^{1/3}$ и $y = \sin x$. Для функции $y = |\sin x|$ точка $x = 0$ является угловой точкой, а для функции $y = x^{2/3}$ — точкой возврата (угловой точкой с нулевым углом).

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную вторую производную и $f''(x_0) > 0$ (< 0), то точка x_0 является точкой выпуклости вниз (вверх) функции $f(x)$.*

Доказательство. Утверждение следует из формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)^2,$$

где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$. Действительно, если $f''(x_0) > 0$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что для любого $x \neq x_0$ из этой окрестности

$$\frac{1}{2} f''(x_0) + \alpha(x) > 0$$

и, следовательно,

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

т.е. точки графика функции $y = f(x)$ для $x \in \mathring{O}(x_0)$ лежат выше касательной в точке x_0. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то

$$\exists O(x_0): \quad \forall x \in \mathring{O}(x_0) \quad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную второго порядка и точка x_0 является точкой перегиба, для $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Действительно, если $f''(x_0) \neq 0$, то, согласно теореме 1, точка x_0 есть точка выпуклости вверх или вниз.

Заметим, что условие $f''(x_0) = 0$ не является достаточным для того, чтобы точка x_0 была точкой перегиба функции $f(x)$. Например, для функции $f(x) = x^4$ точка $x = 0$ является точкой выпуклости вниз, хотя $f''(0) = 0$.

Заметим еще, что если функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, $f'(x_0) = +\infty$ (или $-\infty$) и, следовательно, ее график в точке x_0 имеет вертикальную касательную, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на интервале $(a;b)$, содержащем точку x_0, и дважды дифференцируема на интервалах $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$. Тогда, если $f''(x)$ на $(a;x_0)$ положительна, а на $(x_0;b)$ отрицательна, или наоборот, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.*

Доказательство. Для функции $f(x)$ напишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

где ξ лежит между x и x_0. Из нее видно, что если $f''(x)$ имеет разные знаки на $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, то график функции перегибается через касательную. Теорема 2 доказана.

Таким образом, равенство нулю второй производной является *необходимым условием*, а смена знака второй производной — *достаточным условием точки перегиба* функции.

Приведем еще одно достаточное условие точки перегиба.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную 3-го порядка. Тогда, если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.*

Доказательство. Утверждение следует из формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3(1 + \alpha(x)),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Действительно,

$$\exists O(x_0): \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0) \quad 1 + \alpha(x) \geq \frac{1}{2},$$

а так как $(x - x_0)^3$ меняет знак при переходе x через x_0, то x_0 — точка перегиба. Теорема 3 доказана.

В общем случае, *пусть*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$, где $n \geq 2$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n нечетное, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$, а если n четное, то x_0 — точка выпуклости (вверх, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и вниз, если $f^{(n)}(x_0) > 0$).

Глава 5. Векторные функции и кривые на плоскости и в пространстве

§ 1. Пределы и производные векторных функций

1.1. Определение и кинематическая интерпретация векторной функции. В предыдущих главах рассматривались скалярные функции скалярного аргумента, здесь будем рассматривать векторные функции скалярного аргумента, т.е. функции, у которых аргумент принимает числовые значения, а значениями функции являются векторы.

Определение. Пусть заданы множество $T \subset \mathbb{R}$ и правило, которое каждому числу $t \in T$ ставит в соответствие некоторый вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на плоскости или в пространстве. Тогда множество всевозможных пар вида $(t; \mathbf{r}(t))$, $t \in T$, называется *векторной функцией скалярного* (*числового*) *аргумента* и обозначается $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in T$.

В частности, векторная функция $\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{N}$, — это *последовательность векторов* $\{\mathbf{r}_n\}$, где $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Если все рассматриваемые векторы лежат в одной плоскости и в этой плоскости выбран некоторый базис, то задание векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in T$, равносильно заданию двух числовых (скалярных) функций:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $y(t)$ — координаты вектора $\mathbf{r}(t)$ по выбранному базису. Эти функции называются *координатами* векторной функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in T$.

Аналогично, если рассматриваются векторы в пространстве (трехмерном или, вообще, n-мерном, см. § 1 гл. 6), в котором выбран некоторый базис, то задание векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ равносильно заданию трех или n скалярных функций (координат вектора $\mathbf{r}(t)$).

В дальнейшем будем рассматривать в основном векторы на плоскости или в трехмерном пространстве и будем считать, что выбранные базисы являются ортонормированными.

Часто векторы $\mathbf{r}(t)$ понимают как радиус-векторы точек относительно некоторой фиксированной точки O. Тогда векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in T$, описывает множество точек M с радиус-векторами $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$. Это множество точек называется *годографом* (или *графиком*) векторной функции $\mathbf{r}(t)$ а функция $\mathbf{r}(t)$ — *параметрическим представлением* этого множества. Независимая переменная t называется *параметром* этого представления.

Примером векторной функции является линейная функция $\mathbf{r} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — заданные векторы, $\mathbf{a} \neq 0$. Как известно, эта функция описывает прямую (на плоскости или в пространстве), которая проходит через точки с радиус-векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Другим примером векторной функции будет функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 \cos t + \mathbf{e}_2 \sin t, \quad t \in [0; 2\pi],$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — единичные взаимно ортогональные векторы. Эта функция является параметрическим представлением единичной окружности с центром в точке O.

Векторными функциями описывают движения точек. Именно, считают, что функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ описывает движение точки M с радиус-вектором $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$, где t — время. Тогда функция $\mathbf{r}(t)$ называется *законом движения*, а ее годограф — *траекторией* точки M.

1.2. Пределы и непрерывность векторных функций. Начнем с определения предела векторной функции в предельной точке. В частности, оно будет и определением предела последовательности векторов.

Определение 1. Пусть t_0 — конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $T \subset \mathbb{R}$. Тогда вектор $\mathbf{a}$ называется *пределом векторной функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in T$, при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0.$$

В этом случае будем писать $\mathbf{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$ или «$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{a}$ при $t \to t_0$».

Очевидно, если $\mathbf{r}(t) \to \mathbf{a}$ при $t \to t_0$, то $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\rho}(t)$, где $\boldsymbol{\rho}(t) \to 0$ при $t \to t_0$, и наоборот. В этом случае пишут:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{o}(1) \ \text{при} \ t \to t_0.$$

Теорема 1. *Вектор* $\mathbf{a}$ *является пределом векторной функции* $\mathbf{r}(t)$ *при* $t \to t_0$ *тогда и только тогда, когда координаты вектора* $\mathbf{a}$ *являются пределами соответствующих координат вектора* $\mathbf{r}(t)$ *при* $t \to t_0$.

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a_3 — координаты вектора $\mathbf{a}$, а $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ — координаты вектора $\mathbf{r}(t)$ по данному ортонормированному базису. Тогда справедливы неравенства:

$$|x_i(t) - a_i| \le |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| \le \sum_{j=1}^{3} |x_j(t) - a_j|, \quad i = 1, 2, 3,$$

из которых и следуют утверждения теоремы. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если скалярная функция* $f(t)$ *и векторные функции* $\mathbf{a}(t)$ *и* $\mathbf{b}(t)$ *имеют пределы при* $t \to t_0$, $t \in T$, *то*

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{a}(t)| = |\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t)|,$$

$$\lim_{t \to t_0} f(t)\mathbf{a}(t) = \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t),$$

$$\lim_{t \to t_0} (\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)) = \lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) \pm \lim_{t \to t_0} \mathbf{b}(t),$$

$$\lim_{t \to t_0} (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = (\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t), \lim_{t \to t_0} \mathbf{b}(t)),$$

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] = [\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t), \lim_{t \to t_0} \mathbf{b}(t)].$$

Доказательство. Докажем первое и последнее утверждения.

Пусть $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$. Тогда, как известно,

$$||\mathbf{a}(t)| - |\mathbf{a}_0|| \le |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0|.$$

Отсюда и следует первое утверждение.

Пусть, далее, $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0$. Тогда $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \alpha(t)$, $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0 + \beta(t)$, где $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 0$ при $t \to t_0$, и поэтому

$$|[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0]| = |[\alpha(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \beta(t)]| \le$$
$$\le |\alpha(t)| \cdot |\mathbf{b}(t)| + |\mathbf{a}_0| \cdot |\beta(t)| \to 0$$

при $t \to t_0$, что и доказывает последнее утверждение. Другие утверждения доказываются аналогично. Теорема 2 доказана.

Определение 2. Векторная функция $\mathbf{r}(t)$, $t \in T$, называется *непрерывной* в предельной точке $t_0 \in T$, если предел $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ существует и равен $\mathbf{r}(t_0)$. В любой изолированной точке множества T функция $\mathbf{r}(t)$ тоже считается *непрерывной*.

Из теоремы 1 следует, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координаты.

Из теоремы 2 следует, что длина непрерывного вектора непрерывна, сумма непрерывных векторов непрерывна, произведение (любое) непрерывных функций непрерывно (в точке или на некотором множестве). Например, векторное произведение непрерывных векторов — непрерывный вектор.

Так же, как и для скалярных функций, доказывается теорема о непрерывности сложной функции:

Если функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а векторная функция $\mathbf{r}(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $\mathbf{r}(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

1.3. Производные векторных функций. Определение производной векторной функции почти дословно повторяет соответствующее определение для скалярных функций.

Пусть заданы векторная функция $\mathbf{r}(t)$, $t \in T$, и точка $t_0 \in T$. Тогда для любого $t \in T$, $t \ne t_0$, частное

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h},$$

где $h = t - t_0$, называется *разностным отношением функции* $\mathbf{r}(t)$ *в точке* t_0 *с шагом* h.

Определение 1. Предел разностного отношения функции $\mathbf{r}(t)$, $t \in T$, в точке $t_0 \in T$ с шагом h при $h \to 0$ называется *производной векторной функции в точке* t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$.

Таким образом, по определению,

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$.

Аналогично определяются односторонние производные векторной функции.

Определение 2. Векторная функция $\mathbf{r}(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0, если она определена в некоторой окрестности точки t_0 и в этой точке имеет производную.

Очевидно, функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \alpha(t)\Delta t,$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to t_0$.

Из теоремы 1 п.1.2. следует, что векторная функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы координаты вектора $\mathbf{r}(t)$, причем координатами вектора-производной являются производные координат вектора $\mathbf{r}(t)$, т.е.

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), x_3'(t_0)),$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора $\mathbf{r}$.

Обычным образом доказываются *правила дифференцирования для векторных функций*:

1. *Если функции* $\mathbf{a}(t)$ *и* $\mathbf{b}(t)$ *дифференцируемы в точке* t_0, *то в этой точке функции* $\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *и* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *дифференцируемы и*

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \pm \mathbf{b}',$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})' = (\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}'),$$
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]' = [\mathbf{a}', \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}'].$$

2. *Если функции* $f(t)$ *и* $\mathbf{r}(t)$ *дифференцируемы в точке* t_0, *то в этой точке функция* $f(t)\mathbf{r}(t)$ *дифференцируема и*

$$(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'.$$

3. *Если функция* $\varphi = \varphi(t)$ *дифференцируема в точке* t_0, *а функция* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$ *дифференцируема в точке* $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, *то сложная функция* $\mathbf{r}(\varphi(t))$ *дифференцируема в точке* t_0 *и*

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Следствие. *Если на интервале* $(a; b)$ *векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *дифференцируема и такая, что* $|\mathbf{r}(t)| = \mathrm{const}$, *то*

$$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0 \quad \forall t \in (a; b),$$

т.е. вектор $\mathbf{r}'(t)$ *ортогонален вектору* $\mathbf{r}(t)$.

Доказательство. Так как функция $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t))$ постоянна на $(a; b)$, то ее производная на $(a; b)$ равна нулю, и поэтому

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0.$$

Следствие доказано.

Заметим, что если векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ описывает движение точки, то производная $\mathbf{r}'(t)$ при $t = t_0$ называется *скоростью в момент времени* t_0. Здесь $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся точки M относительно некоторого центра O, а $\mathbf{r}'(t)$ — вектор скорости точки M в момент времени t. Тогда утверждение следствия означает, что при движении точки по сфере (или по окружности) ее скорость ортогональна радиусу сферы (соотв., окружности).

Как показывает следующий пример, для векторных функций не будет справедливой теорема Лагранжа о среднем и даже теорема Ролля.

Пример. На плоскости рассмотрим векторную функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ с координатами

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Она в точках $t = 0$ и $t = 2\pi$ принимает равные значения: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$ — вектор с координатами $(1;0)$. Однако ее производная нигде не обращается в ноль, так как

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Вместо теоремы Лагранжа о среднем для векторных функций имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если векторная функция* $\mathbf{r}(t)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$ *и непрерывна в точках* a *и* b, *то*

$$\exists \tau \in (a;b): \quad |\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \le (b-a)|\mathbf{r}'(\tau)|. \tag{1}$$

Доказательство. Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то неравенство (1) справедливо для любого $\tau \in (a;b)$. Если же $\mathbf{r}(a) \ne \mathbf{r}(b)$, то, введя единичный вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)}{|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)|},$$

получим равенство

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}),$$

в котором справа стоит разность числовой функции $f(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{e})$ в точках a и b.

Функция $f(t)$ непрерывна в точках a и b и дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем $f'(t) = (\mathbf{r}'(t), \mathbf{e})$, поэтому существует $\tau \in (a;b)$ такое, что $f(b) - f(a) = (b-a)(\mathbf{r}'(\tau), \mathbf{e})$ и, следовательно,

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (b-a)|(\mathbf{r}'(\tau), \mathbf{e})| \le (b-a)|\mathbf{r}'(\tau)|.$$

Теорема доказана.

1.4. Радиальная и трансверсальная составляющие производной. Пусть векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определенная на некотором промежутке, дифференцируема и такая, что $|\mathbf{r}(t)| \neq 0$. Тогда скалярная функция $|\mathbf{r}(t)|$ тоже дифференцируема и

$$\frac{d|\mathbf{r}|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{(\mathbf{r},\mathbf{r})} = \frac{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|}.$$

Положим

$$\mathbf{r}_1(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}.$$

Очевидно, что векторная функция $\mathbf{r}_1(t)$ дифференцируема и вектор $\mathbf{r}_1'(t)$ ортогонален вектору $\mathbf{r}_1(t)$.

Дифференцируя функцию $\mathbf{r} = |\mathbf{r}(t)|\mathbf{r}_1(t)$ по правилу дифференцирования произведения, получаем равенство

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d|\mathbf{r}|}{dt}\mathbf{r}_1 + |\mathbf{r}|\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},$$

из которого следует, что производная векторной функции разлагается на две составляющие: *радиальную* (направленную по радиусу) и *трансверсальную* (поперечную, ортогональную радиусу).

Положим

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \alpha\mathbf{r}_2,$$

где $\alpha \geq 0$, а $\mathbf{r}_2$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{r}_1(t)$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (\mathbf{r},\mathbf{r}')|\mathbf{r}|\mathbf{r}_1 + |\mathbf{r}|\alpha\mathbf{r}_2.$$

Отсюда после умножения на $\mathbf{r}$ векторно получаем:

$$[\mathbf{r},\mathbf{r}'] = |\mathbf{r}|\alpha[\mathbf{r},\mathbf{r}_2].$$

Так как $|[\mathbf{r},\mathbf{r}_2]| = |\mathbf{r}|$, то

$$\alpha = \frac{|[\mathbf{r},\mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}|^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}_1 + \frac{|[\mathbf{r},\mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}_2$$

Коэффициенты этого разложения обозначают v_r и v_t и называют *радиальной* и *трансверсальной компонентами скорости*:

$$v_r = \frac{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|}, \qquad v_t = \frac{|[\mathbf{r},\mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}|}. \tag{1}$$

Пример. Найдем радиальную и трансверсальную компоненты скорости точки, движущейся на плоскости по закону

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\sin\omega t.$$

По формулам (1) находим

$$v_r = \frac{1}{r}\omega(b^2 - a^2)\cos\omega t, \quad v_t = \frac{1}{r}ab\omega,$$

где $r = \sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t}$.

В частности, если $a = b = R$, то $v_r = 0$, $v_t = \omega R$.

1.5. Старшие производные и формула Тейлора. Для векторных функций так же, как и для скалярных функций, определяется *вторая производная* и, вообще, *n-я производная*. Очевидно, векторная функция имеет n-ю производную в некоторой точке тогда и только тогда, когда ее координаты в этой точке имеют производные n-го порядка.

Если векторная функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и в этой точке имеет n-ю производную, то для любой ее координаты $x_j(t)$ можно написать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$x_j(t) = x_j(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_j^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \alpha_j(t)(t - t_0)^n,$$

где $\alpha_j(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Следовательно,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \boldsymbol{\alpha}(t)(t - t_0)^n,$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — вектор с координатами $\alpha_j(t)$. Эту формулу обычно записывают так:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \mathbf{o}((t - t_0)^n)$$

при $t \to t_0$. Ее будем называть, как и для скалярных функций, *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Отметим, что для векторных функций нет аналога формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Как показывает пример из п. 1.3., для векторных функций не имеет места теорема Лагранжа и даже теорема Ролля.

§ 2. Кривые на плоскости и в пространстве

2.1. Параметрически заданные кривые. График скалярной функции дает полную информацию о самой функции, в частности, разные функции имеют разные графики. Однако разные векторные функции могут иметь один и тот же годограф, так как точка может двигаться по одной и той же траектории разными способами. Например, векторные функции $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = t^3\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — некоторый ненулевой вектор, определяют прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\mathbf{a}$, а их сужения для $t \in [0;1]$ определяют прямолинейный отрезок OA такой, что $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$.

Определение 1. Пусть на промежутке Δ задана непрерывная векторная функция $\mathbf{r}(t)$. Тогда множество Γ всех точек пространства (или плоскости) с радиус-векторами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \Delta$, называется *ориентированной кривой*, а векторная функция $\mathbf{r}(t)$, $t \in \Delta$, — *параметрическим заданием* (или *представлением*) этой кривой. В этом случае будем писать $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$.

Будем считать, что другая непрерывная векторная функция $\mathbf{f}(\tau)$, $\tau \in \tilde{\Delta}$, задает ту же ориентированную кривую Γ, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau = \varphi(t)$, $t \in \Delta$, такая, что $\varphi(\Delta) = \tilde{\Delta}$ и

$$\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{r}(t) \quad \forall t \in \Delta.$$

Любая такая функция $\tau = \varphi(t)$ называется *допустимым преобразованием параметра кривой* Γ.

Ориентированность кривой Γ означает, что порядок чисел на промежутке Δ порождает соответствующий порядок на кривой Γ. Именно, считается, что точка с радиус-вектором $\mathbf{r}(t_1)$ предшествует точке с радиус-вектором $\mathbf{r}(t_2)$, если $t_1 < t_2$.

Для ориентированной кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in [a;b]\}$ точка A с радиус-вектором $\mathbf{r}(a)$ называется *началом*, а точка B с радиус-вектором $\mathbf{r}(b)$ — *концом* этой кривой. В этом случае кривую Γ удобно обозначать $\overset{\frown}{AB}$.

Определение 2. Кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$ называется *суммой кривых* Γ_1 и Γ_2, если

$$\Gamma_j = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta_j\}, \ \ j = 1, 2,$$

причем $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$ и конец промежутка Δ_1 совпадает с началом промежутка Δ_2. В этом случае будем писать $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ или $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Определение 3. Кривая, имеющая дифференцируемое (или непрерывно дифференцируемое) представление, называется *дифференцируемой* (соотв., *непрерывно дифференцируемой*).

Для непрерывно дифференцируемых кривых допустимыми преобразованиями параметра являются непрерывно дифференцируемые функции с положительной производной.

Аналогично определяются *дважды дифференцируемые* и, вообще, *n раз дифференцируемые* (*непрерывно дифференцируемые*) *кривые*.

Определение 4. Непрерывная кривая называется *кусочно-непрерывно дифференцируемой*, если она является суммой конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых.

3.2. Касательная к кривой. Пусть задана кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$. Через точки M и M_0 с радиус-векторами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ проведем секущую MM_0 (рис. 5.1).

Очевидно, вектор

$$l(t) = \frac{\Delta\mathbf{r}/\Delta t}{|\Delta\mathbf{r}/\Delta t|}, \tag{1}$$

где $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$, является единичным вектором прямой M_0M и всегда, т.е. при $\Delta t > 0$ и при $\Delta t < 0$, направлен в сторону возрастания параметра t на кривой Γ.

Определение 1. Прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + tl$, где

$$l = \lim_{t \to t_0} l(t), \tag{2}$$

называется *касательной к кривой* Γ *в точке* M_0.

Таким образом, касательная к кривой Γ в точке M_0 — это *предельное положение секущей* MM_0, *когда точка* $M \in \Gamma$ *приближается к точке* M_0.

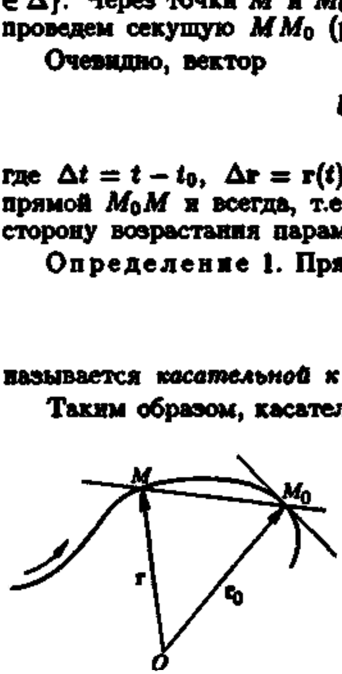

Рис. 5.1

Аналогично определяются *односторонние касательные*: нужно лишь в равенстве (2) предел при $t \to t_0$ заменить на предел при $t \to t_0 \pm 0$.

Теорема. *Пусть задана кривая* $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$, *и пусть* $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$. *Тогда, если* $\mathbf{r}'(t_0)$ *существует и* $|\mathbf{r}'(t_0)| \neq 0$, *то данная кривая в точке* M_0 *с радиус-вектором* $\mathbf{r}_0$ *имеет касательную*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}'(t_0). \tag{3}$$

Доказательство. Так как $\mathbf{r}'(t_0)$ существует и $|\mathbf{r}'(t_0)| \neq 0$, то из (1) получаем

$$l(t) = \frac{\mathbf{r}'(t_0) + \alpha(t)}{|\mathbf{r}'(t_0) + \alpha(t)|},$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to t_0$, и поэтому

$$\lim_{t \to t_0} l(t) = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ является направляющим вектором касательной, которая задается уравнением (3). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$ — дифференцируемая кривая. Точка M_0 этой кривой с радиус-вектором $\mathbf{r}(t_0)$ называется *неособой*, если $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, и *особой*, если $\mathbf{r}'(t_0) = 0$.

Из доказанной теоремы следует, что дифференцируемая кривая Γ в окрестности неособой точки M_0 «располагается вдоль касательной» в том смысле, что

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

при $t \to t_0$, т.е. при $t \to t_0$ с точностью до $o(t - t_0)$ кривая Γ совпадает с касательной

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0).$$

Рассмотрим характер поведения дифференцируемой кривой в окрестности особой точки.

Пусть кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$ такая, что $\mathbf{r}'(t_0) = 0$, но $\mathbf{r}''(t_0) \neq 0$. Тогда

$$l(t) = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{r}''(t_0)\Delta t + \beta(t)\Delta t)}{\left|\frac{1}{2}(\mathbf{r}''(t_0)\Delta t + \beta(t)\Delta t)\right|},$$

где $\beta(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Следовательно,

$$\lim_{t \to t_0 \pm 0} l(t) = \pm\frac{\mathbf{r}''(t_0)}{|\mathbf{r}''(t_0)|}.$$

Такая точка называется *точкой возврата*. В точке возврата кривая имеет односторонние касательные, которые являются противоположно ориентированными прямыми, т.е. геометрически совпадают, но имеют противоположные ориентации.

Если кривая Γ такая, что $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}''(t_0) = 0$, но $\mathbf{r}'''(t_0) \neq 0$, то, очевидно,

$$\lim_{t \to t_0} l(t) = \frac{\mathbf{r}'''(t_0)}{|\mathbf{r}'''(t_0)|}$$

и, следовательно, кривая Γ в точке M_0 имеет обычную касательную, которая задается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}'''(t_0).$$

Вообще, пусть кривая Γ такая, что $\mathbf{r}'(t_0) = \ldots = \mathbf{r}^{(n-1)}(t_0) = 0$ и $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq 0$. Тогда при любом n кривая Γ в точке M_0 имеет односторонние касательные, которые геометрически совпадают с прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}^{(n)}(t_0).$$

Причем, если n нечетное, то в точке M_0 существует обычная касательная, а если n четное, то M_0 — точка возврата.

Определение 3. Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой*.

Из доказанной теоремы следует, что гладкая кривая в любой точке имеет касательную, которая задается уравнением (3). В частности, в концевых точках она имеет односторонние касательные.

2.3. Плоские кривые. В общем случае непрерывная параметрически заданная кривая Γ, лежащая в плоскости Oxy, может иметь довольно необычный вид. Например, она может состоять из одной точки плоскости. С другой стороны, известны непрерывные кривые, полностью заполняющие некоторый квадрат, т.е. проходящие через любую его точку. Первый пример такой кривой построен Дж. Пеано, и поэтому они называются *кривыми Пеано*.

Наиболее общий и естественный класс непрерывных плоских кривых образуют кривые, являющиеся суммой конечного числа графиков непрерывных функций $y = f(x)$ или $x = g(y)$.

Определение 1. Плоская кривая Γ называется *явно заданной* или *простым куском*, если она является графиком непрерывной функции $y = f(x)$ или $x = g(y)$, определенной на некотором промежутке Δ. Тогда функция $y = f(x)$, $x \in \Delta$, (соотв., $x = g(y)$, $y \in \Delta$) называется *явным заданием* кривой Γ.

Очевидно, явное задание кривой является частным случаем параметрического задания. В частности, если функция $y=f(x)$, $x \in \Delta$, непрерывно дифференцируема, то она задает гладкую кривую.

Теорема 1. *Если плоская кривая* $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in \Delta\}$ *является гладкой, то у любой точки* $t_0 \in \Delta$ *существует* δ*-окрестность* $O_\delta(t_0)$ *такая, что часть кривой* Γ *при* $t \in O_\delta(t_0) \cap \Delta$ *имеет явное задание (может быть, с другой ориентацией).*

Доказательство. Задание векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \Delta$, равносильно заданию двух скалярных функций:

$$x = x(t) \quad \text{и} \quad y = y(t), \quad t \in \Delta.$$

Тогда, согласно определению гладкой кривой, функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на Δ и для любого $t_0 \in \Delta$ выполняется условие: или $x'(t_0) \neq 0$ или $y'(t_0) \neq 0$.

Пусть, например, $x'(t_0) \neq 0$. Тогда, в силу непрерывности $x'(t)$ на Δ, существует $\delta > 0$ такое, что $x'(t) \neq 0$ для любого t из множества $O_\delta(t_0) \cap \Delta$, и поэтому функция $x = x(t)$ на этом множестве имеет непрерывно дифференцируемую обратную $t = t(x)$. Подставив $t = t(x)$ в $y = y(t)$, получим функцию $f(x) = y(t(x))$.

Если $x'(t_0) > 0$, то функция $y = f(x)$ является явным заданием кривой $\gamma = \{\mathbf{r}(t), t \in O_\delta(t_0) \cap \Delta\}$. Если же $x'(t_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ является явным заданием кривой, которая геометрически совпадает с γ, но имеет противоположную ориентацию.

Аналогично рассматривается случай, когда $y'(t_0) \neq 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если плоская кривая* Γ *является гладкой и имеет концевые точки, то она является суммой конечного числа гладких кривых, каждая из которых имеет явное задание (может быть, с другой ориентацией).*

Доказательство. Так как данная кривая Γ имеет концевые точки, то она задается векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определенной на некотором отрезке $[a; b]$. Из теоремы 1 следует, что для любого $t_0 \in [a; b]$ существует $\delta > 0$ такое, что часть кривой Γ, соответствующая $t \in O_\delta(t_0) \cap [a; b]$, имеет явное представление (может быть, с другой ориентацией).

Так выбранные δ-окрестности $O_\delta(t_0)$ образуют покрытие отрезка $[a; b]$. По теореме Гейне о покрытии, существует конечное число таких интервалов (окрестностей), которые снова образуют покрытие отрезка $[a; b]$. Пусть таких интервалов N. Занумеруем их слева направо: $I_1, \ldots, I_N$. Не ограничивая общности, можно считать, что несоседние интервалы не пересекаются. Тогда, выбрав в каждом множестве $I_j \cap I_{j+1}$, $j = 1, \ldots, N-1$, какую-нибудь точку a_j, видим, что кривая Γ является суммой кривых

$$\Gamma_j = \{\mathbf{r}(t), a_{j-1} \le t \le a_j\}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

где $a_0 = a$, $a_N = b$. По построению каждая кривая Γ_j имеет явное представление (может быть, с другой ориентацией). Теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим кривую, заданную уравнениями

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Если считать точку $A(1; 0)$, которая получается при $t = 0$ и $t = 2\pi$, за одну точку этой кривой, то это будет единичная окружность с центром в точке O. Она является суммой двух кусков, имеющих явные задания

$$\Gamma_\pm : y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

Ориентация кривой Γ_- совпадает с ориентацией кривой Γ, а ориентация Γ_+ противоположна. Однако эти функции не имеют конечных производных в точках $x = \pm 1$. Чтобы получить непрерывно дифференцируемые функции, нужно окружность разбить на 4 части, которые (с точностью до ориентации) имеют явные задания:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \left[-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right],$$

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2}, \quad y \in \left[-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right].$$

§ 3. Длина кривой

3.1. Определение и основные свойства длины кривой. Пусть задана кривая

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}.$$

Выберем точки $t_0, t_1, \ldots, t_n$ следующим образом:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Через M_i обозначим точку с радиус-вектором $\mathbf{r}(t_i)$. Тогда ломаная $M_0M_1\ldots M_n$ называется *вписанной* в кривую Γ.

Через L_Γ обозначим множество всех ломаных, вписанных в кривую Γ. Наконец, если l — некоторая ломаная, то через $|l|$ будем обозначать ее длину, которая, по определению, равна сумме длин всех ее звеньев.

Определение 1. Величина

$$S = \sup_{l \in L_\Gamma} |l|,$$

где верхняя грань берется по всем ломаным l, вписанным в кривую Γ, называется *длиной кривой* Γ.

Очевидно, длина S любой кривой Γ удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le S \le +\infty.$$

Определение 2. Кривая называется *спрямляемой*, если она имеет конечную длину.

Очевидно, если кривая Γ спрямляема, то и любая кривая γ, являющаяся частью кривой Γ, тоже спрямляема.

Теорема. *Если кривая* Γ *является суммой кривых* Γ_1 *и* Γ_2 *и* S, S_1, S_2 *— длины этих кривых, то*

$$S = S_1 + S_2. \tag{1}$$

В частности, кривая Γ *спрямляема тогда и только тогда, когда спрямляемы* Γ_1 *и* Γ_2.

Доказательство. Пусть l_1, l_2 — ломаные, вписанные в Γ_1 и Γ_2 соответственно. Очевидно, ломаная $l_1 + l_2$ вписана в кривую $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, причем $|l_1 + l_2| = |l_1| + |l_2|$. Следовательно, $|l_1| + |l_2| \le S$ для любых l_1 и l_2 и поэтому

$$S_1 + S_2 \le S. \tag{2}$$

Пусть теперь l — ломаная, вписанная в кривую Γ. Построим новую ломаную l^*, добавив к вершинам ломаной l еще точку, которая является концом кривой Γ_1 и началом кривой Γ_2. Очевидно, $|l| \le |l^*|$ и $l^* = l_1 + l_2$, где l_1, l_2 — ломаные, вписанные в Γ_1 и Γ_2, соответственно. Следовательно, $|l| \le S_1 + S_2$ для любой ломаной l, вписанной в Γ, и поэтому

$$S \le S_1 + S_2. \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) следует равенство (1). Теорема доказана.

Примеры спрямляемых кривых хорошо известны. В следующем пункте будет рассмотрен довольно широкий класс спрямляемых кривых, а сейчас приведем пример неспрямляемой кривой.

Пример. Пусть кривая Γ является графиком непрерывной на отрезке $[0;1]$ функции $y = f(x)$, где $f(0) = 0$ и $f(x) = x\sin(\pi/x)$ для $x \neq 0$. Покажем, что длина кривой Γ равна $+\infty$.

Через M_n обозначим точку на Γ с абсциссой $x_n = 2/n$, а через M_0 — точку с координатами $x = 1$, $y = 0$. Тогда ломаная $l_n = OM_n \ldots M_1M_0$ вписана в кривую Γ. Очевидно,

$$|l_n| > 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

и поэтому $\sup\limits_n |l_n| = +\infty$, что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим еще одно понятие, относящееся к спрямляемым кривым.

Пусть кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}$ спрямляема, и пусть $s(t)$ — длина кривой $\gamma_t = \{\mathbf{r}(\tau),\ a \le \tau \le t\}$. Тогда функция $s(t)$, $t \in [a;b]$, называется *переменной длиной дуги кривой* Γ.

Очевидно, так определенная функция $s(t)$ является возрастающей на отрезке $[a;b]$, причем $s(a) = 0$, а $s(b) = S$, где S — длина кривой Γ.

Обобщим понятие переменной длины дуги на кривые, которые могут быть и неспрямляемыми.

Определение 3. Пусть кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ t \in \Delta\}$, где $\Delta = [a;b]$ или $\Delta = [a;b)$, такая, что любая ее часть γ_t, $t \in \Delta$, спрямляема, и пусть $s(t)$ — длина кривой γ_t. Тогда функция $s(t)$, $t \in \Delta$, называется *переменной длиной дуги кривой* Γ.

В случае, когда $\Delta = [a;b)$, *длиной кривой* Γ называется предел функции $s(t)$ при $t \to b$. Если этот предел конечный, то кривая Γ называется *спрямляемой*.

3.2. Длина дуги непрерывно дифференцируемой кривой. Прежде всего докажем одно достаточное условие спрямляемости кривой.

Теорема 1. *Если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема. Причем, если S — ее длина, то*

$$S \le (b-a)\sup_t |\mathbf{r}'(t)|, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем $t \in [a;b]$.

Доказательство. Пусть l — ломаная, вписанная в кривую Γ, и пусть ее вершины имеют радиус-векторы $\mathbf{r}(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, n$, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда

$$|l| = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|. \tag{2}$$

По теореме из п.1.3, существует $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ такое, что

$$|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \le (t_i - t_{i-1})|\mathbf{r}'(\tau_i)|.$$

Отсюда и из (2) получаем неравенство

$$|l| \le (b-a)\sup_t |\mathbf{r}'(t)|.$$

Так как оно справедливо для любой ломаной l, вписанной в кривую Γ, то кривая Γ спрямляема и ее длина S удовлетворяет неравенству (1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t < b\}$ непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги $s(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a; b)$ и $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$.*

Доказательство. Через M_t обозначим точку кривой Γ с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$. Из теоремы 1 следует, что любая дуга $\breve{M_a M_t}$ кривой Γ имеет длину $s(t)$.

В силу аддитивности длины дуги, абсолютная величина разности

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

равна длине дуги $\breve{M_t M_{t+\Delta t}}$ кривой Γ и, как следствие, $|\Delta s| \ge |\Delta \mathbf{r}|$ где

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t),$$

а $|\Delta \mathbf{r}|$ — длина вектора $\overrightarrow{M_t M_{t+\Delta t}}$ С другой стороны, по теореме 1 имеем:

$$|\Delta s| \le |\Delta t| \sup_\tau |\mathbf{r}'(\tau)|,$$

где верхняя грань берется по всем τ из отрезка с концами t и $t + \Delta t$.

Так как функция $|\mathbf{r}'(\tau)|$ непрерывна, то для любых t и $t + \Delta t$ существует ξ такое, что оно принадлежит отрезку с концами t и $t + \Delta t$ и для него справедливо равенство

$$\sup_\tau |\mathbf{r}'(\tau)| = |\mathbf{r}'(\xi)|.$$

Таким образом,

$$|\Delta \mathbf{r}| \le |\Delta s| \le |\Delta t| \cdot |\mathbf{r}'(\xi)|.$$

По определению, функция $s(t)$ возрастающая, поэтому $\Delta s/\Delta t \ge 0$ для любого допустимого $\Delta t \ne 0$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right| \le \frac{\Delta s}{\Delta t} \le |\mathbf{r}'(\xi)|,$$

из которого в пределе при $\Delta t \to 0$ следует, что $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Если кривая Γ гладкая, то среди ее представлений есть такое, в котором параметром является переменная длина дуги s. Тогда, если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $M \in \Gamma$, то вектор $d\mathbf{r}/ds$ — единичный.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \leq t < b\}$.

Так как $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0$ на $[a; b)$, то функция $s = s(t)$ строго возрастающая и имеет обратную $t = t(s)$, $s \in [0; S)$, где S — длина кривой Γ. Следовательно, функция $t = t(s)$ — допустимое преобразование параметра гладкой кривой Γ, а векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$, $s \in [0; S)$, — искомое задание кривой Γ. Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{s'(t)} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},$$

и поэтому $|d\mathbf{r}/ds| = 1$. Следствие доказано.

Равенство

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|} = 1$$

имеет простой геометрический смысл: предел отношения длины дуги $|\Delta s|$ к длине стягивающей хорды $|\Delta \mathbf{r}|$ при $\Delta s \to 0$ равен 1.

3.3. Скорость движения по траектории. Если векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t — время, описывает движение точки M на плоскости или в пространстве, то, как известно, вектор $\mathbf{r}'(t)$ называется скоростью этого движения в момент времени t. С другой стороны, эта векторная функция задает некоторую кривую Γ. Тогда, если $s(t)$ — переменная длина дуги кривой Γ, то скалярная функция $s = s(t)$, называется *законом движения точки M по кривой* Γ, а производная $s'(t)$ — *скоростью* этого движения. Формула

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

означает, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и его длина равна скорости движения по траектории.

В частности, если вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$ при изменении t остается единичным и лежит в одной плоскости, то $s(t)$ — длина дуги единичной окружности, которую точка M проходит за время t, т.е. угол поворота (выраженный в радианах) вектора $\mathbf{r}_1$ за время t. Тогда $s'(t)$ — это *угловая скорость $\omega(t)$ вращения вектора* $\mathbf{r}_1$ в момент времени t. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} \cdot \omega(t) = \omega(t)\mathbf{l}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{l}(t)$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{r}_1(t)$.

В пространстве векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$, где $\mathbf{r}_1(t)$ — единичный вектор, задает некоторую кривую на единичной сфере. Тогда $s(t)$ — длина дуги этой кривой, которую точка M проходит за время t. Как и на плоскости, $s(t)$ будем называть *углом поворота вектора* $\mathbf{r}_1$ за время t, а $s'(t)$ — *угловой скоростью вращения вектора* $\mathbf{r}_1$. Обозначив $s'(t)$ через $\omega(t)$, снова получим формулу (1). Если же $\mathbf{r} = R\mathbf{r}_1(t)$, где $R = \mathrm{const}$ и $|\mathbf{r}_1(t)| = 1$, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = R\omega(t)\,\mathbf{l}(t).$$

§ 4. Кривизна плоской кривой

4.1. Кривизна и формулы Френе. Как известно, гладкая кривая Γ имеет представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, в котором параметром является переменная длина дуги s. Тогда единичный вектор касательной к Γ в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$ находится по формуле

$$\mathbf{l}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{1}$$

Пусть гладкая кривая Γ дважды дифференцируема. Тогда вектор $\mathbf{l}(s)$ имеет производную по s, которая является скоростью изменения вектора $\mathbf{l}(s)$ относительно параметра s. А так как вектор $\mathbf{l}(s)$ может менять только направление, то

$$k(s) = \left|\frac{d\mathbf{l}}{ds}\right| \tag{2}$$

определяет скорость вращения вектора $\mathbf{l}$, а единичный вектор

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{ds} \tag{3}$$

указывает направление этого вращения.

Скорость вращения вектора $\mathbf{l}$, т.е. скорость вращения касательной к кривой Γ в точке M, относительно параметра s естественно принять за меру искривленности кривой Γ в точке M.

Определение. Скорость вращения касательной к кривой Γ в точке M относительно переменной длины дуги s называется *кривизной кривой* Γ *в точке* M и обозначается $k(M)$.

Таким образом, кривизна гладкой дважды дифференцируемой кривой Γ в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, согласно определению, вычисляется по формуле (2), т.е.

$$k(s) = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|.$$

Пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, определяемых по формулам (1) и (3), называется *подвижным* (*сопровождающим* или *основным*) *репером плоской кривой* Γ.

Очевидно, вектор $\mathbf{n}(s)$ вращается с той же скоростью, что и вектор $\mathbf{l}(s)$, причем он вращается в направлении вектора $-\mathbf{l}(s)$. Из этого замечания и равенства (3) следует, что для векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ и их производных по s справедливы соотношения

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = k\mathbf{n}, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{l},$$

которые называются *формулами Френе* для плоской кривой.

Можно показать, что кривизна полностью определяет форму плоской кривой в том смысле, что если для двух плоских кривых их кривизны как функции длины дуги одинаковы, то эти кривые конгруэнтны, т.е. могут быть совмещены движением. Поэтому задание кривизны плоской кривой как функции длины дуги называют *натуральным уравнением* этой кривой.

4.2. Формулы для вычисления кривизны. Пусть кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ t \in \Delta\}$ дважды дифференцируема и без особых точек. Выразим кривизну этой кривой через производные по произвольному параметру t.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{s'},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}'}{s'}\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'}\cdot\frac{\mathbf{r}''s' - \mathbf{r}'s''}{s'^2},$$

где $\mathbf{r}'$ и s' — производные по параметру t. Вектор $d^2\mathbf{r}/ds^2$ ортогонален единичному вектору $d\mathbf{r}/ds$, поэтому

$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \left|\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right]\right|.$$

Подставив сюда выражения производных по s через производные по t, получим:

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|}{s'^3}.$$

А так как $s' = |\mathbf{r}'|$, то

$$k(t) = \frac{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}'|^3} \tag{1}$$

Если плоская кривая Γ задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ с координатами $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$k(t) = \frac{|x''y' - y''x'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

В частности, если кривая Γ имеет явное задание $y = f(x)$, то

$$k(t) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Легко видеть, что кривизна прямой равна нулю во всех точках, а кривизна окружности радиуса R постоянна и равна $1/R$.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Найдем кривизну параболы, заданной уравнением $y = ax^2$, $a > 0$.

По формуле (3) имеем:

$$k(x) = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}.$$

Отсюда видно, что кривизна этой параболы имеет максимум в вершине, т.е. при $x = 0$, и стремится к нулю, когда $x \to \pm\infty$:

$$k(0) = 2a, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0.$$

Пример 2. Найдем кривизну эллипса с полуосями a и b.

Как известно, в соответствующей системе координат на плоскости эта кривая задается уравнениями:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тогда по формуле (2) получаем

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

Если, в частности, $a = b = R$, то $k = 1/R$.

Пусть, для определенности, $a \ge b$. Тогда

$$k(t) = \frac{ab}{(b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t)^{3/2}}$$

Отсюда видно, что наибольшую кривизну эллипс имеет в точках, где $\sin t = 0$, а наименьшую — в точках, где $\sin t = \pm 1$:

$$\max_t k(t) = \frac{a}{b^2}, \qquad \min_t k(t) = \frac{b}{a^2}.$$

4.3. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта. Как известно, для любой окружности справедлива формула

$$R = \frac{1}{k},$$

где R — радиус, а k — кривизна окружности. Эта формула остается справедливой и в пределе при $k \to +0$, если считать, что прямая — это окружность бесконечного радиуса. По аналогии, для произвольной кривой вводятся понятия радиуса кривизны и центра кривизны.

Определение 1. Пусть кривая Γ в точке M имеет кривизну $k > 0$. Тогда число $R = 1/k$ называется *радиусом кривизны кривой* Γ в точке M. Если же $k = 0$, то, по определению, $R = +\infty$.

Определение 2. Пусть R — радиус кривизны, а $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ — основной репер плоской кривой Γ в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тогда точка плоскости с радиус-вектором $\rho = \mathbf{r} + R\mathbf{n}$ называется *центром кривизны кривой* Γ в точке M.

Найдем выражение для радиус-вектора ρ центра кривизны кривой Γ в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ через производные от $\mathbf{r}(t)$ по параметру t.

По определению,

$$\rho = \mathbf{r} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},$$

где k — кривизна кривой Γ в точке M. Как известно,

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}'|^3},$$

где $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ — производные по параметру t. А так как

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\mathbf{r}''s' - \mathbf{r}'s''}{s'^3}, \qquad s' = |\mathbf{r}'|, \qquad s'' = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}'|},$$

то

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\mathbf{r}''(\mathbf{r}', \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}'|^4}.$$

Последнее выражение можно записать короче, если воспользоваться двойным векторным произведением:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{[\mathbf{r}'[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']]}{|\mathbf{r}'|^4}.$$

Таким образом,

$$\rho = \mathbf{r} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|^2}[\mathbf{r}', [\mathbf{r}'', \mathbf{r}']]. \tag{1}$$

Определение 3. Множество всех центров кривизны данной кривой называется *эволютой* этой кривой.

По доказанному выше, если дважды дифференцируемая гладкая кривая Γ задана векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то ее эволюта задается векторной функцией (1).

Если $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$, то, как легко показать,

$$|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']| = |\Delta|, \qquad [\mathbf{r}', [\mathbf{r}'', \mathbf{r}']] = \Delta \cdot (-\mathbf{i}y' + \mathbf{j}x'),$$

где $\Delta = x'y'' - x''y'$, и поэтому

$$\rho = \mathbf{r}(t) - \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}{\Delta}(\mathbf{i}y' - \mathbf{j}x').$$

А если ξ, η — координаты вектора ρ, то

$$\xi = x(t) - y' \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \tag{2}$$

$$\eta = y(t) + x' \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{3}$$

В случае, когда кривая Γ имеет явное задание $y = f(x)$, формулы (2) и (3) принимают вид

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \tag{4}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{5}$$

Из определения эволюты непосредственно следует, что эволюта окружности состоит из одной точки — центра этой окружности. Это следует и из формул (2) и (3).

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Найдем эволюту параболы $y = ax^2$, $a > 0$.

По формулам (4) и (5) находим:

$$\xi = x - \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} \cdot 2ax = -4a^2x^3,$$

$$\eta = ax^2 + \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} = \frac{1}{2a} + 3ax^2.$$

Это — параметрические уравнения (с параметром x) эволюты данной параболы. Из них, исключая параметр x, получаем уравнение

$$\eta = \frac{1}{2a} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2a}} \cdot \xi^{2/3}.$$

Кривая, являющаяся графиком этой функции, называется *полукубической параболой*. На рис. 5.2 изображены парабола $y = (1/2)x^2$ и ее эволюта $y = 1 + (3/2)x^{2/3}$. Заметим, что ветвь при $x < 0$ является эволютой ветви параболы при $x > 0$ и наоборот.

Пример 2. Найдем эволюту эллипса

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad a \geq b > 0.$$

По формулам (2) и (3) находим:

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Это — параметрические уравнения эволюты данного эллипса. Исключая параметр, получаем:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Кривая, определяемая этим уравнением, называется *астроидой*. На рис. 5.3 изображен эллипс $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ и его эволюта $x = 1,5\cos^3 t$, $y = -3\sin^3 t$.

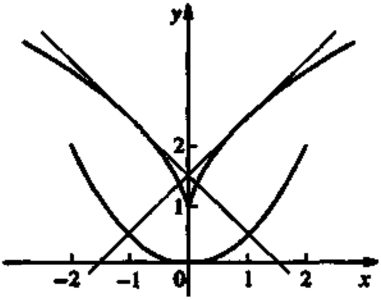

Рис. 5.2

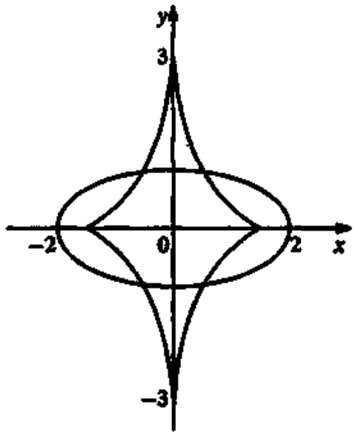

Рис. 5.3

4.4. Эвольвента. В предыдущем пункте была определена эволюта кривой. Это определение можно сформулировать так: кривая γ называется эволютой кривой Γ, если любая точка $O \in \gamma$ является центром кривизны для некоторой точки $M \in \Gamma$ и любой такой центр кривизны лежит на γ.

Определение. Если кривая γ является эволютой кривой Γ, то кривая Γ называется *эвольвентой кривой* γ.

Рассмотрим характерные взаимные свойства эволюты и эвольвенты. Будем предполагать, что кривая Γ трижды непрерывно дифференцируема и имеет представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — переменная длина дуги. В этом случае эволюта задается уравнением

$$\rho = \mathbf{r} + R\mathbf{n}, \tag{1}$$

где R — радиус кривизны, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, ρ — радиус-вектор центра кривизны кривой Γ в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r}$. Будем считать, что $dR/ds \neq 0$.

1. *Пусть O_M обозначим центр кривизны кривой* Γ *в точке* M. *Тогда нормаль к кривой* Γ *в точке* M *является касательной к ее эволюте в точке* OM.

Коротко это утверждение можно сформулировать так: *Нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте.*

Доказательство. Из уравнения (1) находим, что

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{dR}{ds}\mathbf{n} + R\frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

А так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = l, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -kl, \qquad Rk = 1,$$

то

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{dR}{ds}\mathbf{n}, \tag{2}$$

т.е. вектор касательной к эволюте в точке O_M коллинеарен вектору $\mathbf{n}$. Следовательно, прямая MO_M является касательной к эволюте в точке O_M.

2. *Пусть R_1 и R_2 — радиусы кривизны, а O_1 и O_2 — центры кривизны кривой* Γ *в точках M_1 и M_2. Тогда, если $|\breve{O_1O_2}|$ — длина дуги $\breve{O_1O_2}$ эволюты, то $|\breve{O_1O_2}| = |R_2 - R_1|$.*

Коротко это утверждение формулируют так: *приращение длины дуги эволюты равно приращению радиуса кривизны эвольвенты.*

Доказательство. Из равенства (2) следует, что

$$\left|\frac{d\rho}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{ds}\right|. \tag{3}$$

Обозначим через σ длину дуги эволюты кривой Γ, ориентированной параметром s. Тогда, как известно,

$$\left|\frac{d\rho}{ds}\right| = \frac{d\sigma}{ds}. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда $dR/ds > 0$. Тогда из (3) и (4) следует, что

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dR}{ds},$$

т.е. $\sigma(s) = R(s) + c$, где c — некоторая постоянная. Отсюда и следует, что

$$|\breve{O_1O_2}| = |R_2 - R_1|$$

для любых точек M_1 и M_2 кривой Γ.

Случай $dR/ds < 0$ рассматривается аналогично.

4.5. Касательное и нормальное ускорения. Пусть векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t — время, описывает движение точки M. Тогда $\mathbf{r}'(t)$ — скорость, а $\mathbf{r}''(t)$ — ускорение этого движения в момент времени t.

Пусть $s = s(t)$ — длина дуги кривой Γ, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. В терминах движения, $s(t)$ — это длина пути, пройденного точкой за время t. Тогда $s'(t)$ — это скорость v точки на кривой Γ, и

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\mathbf{l}, \tag{1}$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор касательной к кривой Γ в рассматриваемой точке.

Из равенства (1) следует, что

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\mathbf{l} + v\frac{d\mathbf{l}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{l} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n},$$

так как

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n},$$

где R — радиус кривизны, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали кривой Γ в рассматриваемой точке.

Таким образом,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\mathbf{l} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{2}$$

Первое слагаемое называется *касательным ускорением*, а второе — *нормальным ускорением*. Иногда коэффициенты разложения (2) тоже называют *касательным* и *нормальным ускорениями* и обозначают a_τ и a_n:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{3}$$

Пример. Найти ускорение точки, которая с постоянной скоростью v движется по эллипсу, заданному уравнениями

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

где $a \geq b > 0$.

По формулам (3) находим: $a_\tau = 0$, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, где (см. пример 2 из п.4.2) $R = \dfrac{1}{ab}(b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi)^{3/2}$.

Очевидно,

$$\max_\varphi a_n = \frac{av^2}{b^2}, \qquad \min_\varphi a_n = \frac{bv^2}{a^2}.$$

§ 5. Кривизна и кручение пространственной кривой

5.1. Нормальная плоскость, кривизна, главная нормаль и эволюта. Пусть кривая Γ в точке M имеет касательную. Тогда любая прямая, которая проходит через точку M и перпендикулярна касательной, называется *нормалью к кривой* Γ в точке M.

На плоскости у кривой в точке может быть лишь одна нормаль, а в пространстве — целая *нормальная плоскость*. Если точка M_0 кривой Γ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ является неособой, то нормальная плоскость в точке M_0 к кривой Γ имеет уравнение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'(t_0)) = 0.$$

На плоскости это уравнение будет уравнением нормали.

Пусть дважды дифференцируемая кривая Γ имеет представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — переменная длина дуги. Тогда $\mathbf{l} = d\mathbf{r}/ds$ — единичный вектор касательной к кривой Γ в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}'(s)$, а вектор $d^2\mathbf{r}/ds^2$ — ортогонален вектору $\mathbf{l}$.

Как и на плоскости, величина

$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|$$

называется *кривизной кривой* Γ *в точке* M. Тогда единичный вектор

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

называется *вектором главной нормали кривой* Γ *в точке* M, а нормаль к Γ в точке M, параллельная вектору $\mathbf{n}$, — *главной нормалью кривой* Γ *в точке* M. Иногда единичный вектор $\mathbf{n}$ тоже называют главной нормалью.

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* кривой в рассматриваемой точке. А точка с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{n}R$, где R — радиус кривизны кривой Γ в точке M, называется *центром кривизны кривой* Γ *в точке* M.

Множество всех центров кривизны данной кривой называется *эволютой* этой кривой.

Как и на плоскости, доказывается, что если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ t \in \Delta\}$ дважды дифференцируема и без особых точек, то кривизна k вычисляется по формуле:

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}'|^3}, \tag{1}$$

а эволюта имеет уравнение

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{|\mathbf{r}'^2|}{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|^2}[\mathbf{r}', [\mathbf{r}'', \mathbf{r}']].$$

Пример. Найдем кривизну винтовой линии, заданной уравнениями:

$$x = R\cos\omega t, \qquad y = R\sin\omega t, \qquad z = ht,$$

где $R > 0$, $\omega \neq 0$, $h \neq 0$.

Для этого воспользуемся формулой (1). Сначала найдем длину вектора $\mathbf{r}'$:

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2 + h^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + h^2}.$$

Затем найдем длину вектора $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$:

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\omega\sin\omega t & R\omega\cos\omega t & h \\ -R\omega^2\cos\omega t & -R\omega^2\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}hR\omega^2\sin\omega t - \mathbf{j}hR\omega^2\cos\omega t + \mathbf{k}R^2\omega^3;$$

$$|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']| = \sqrt{h^2R^2\omega^4 + R^4\omega^6} = R\omega^2\sqrt{h^2 + R^2\omega^2}.$$

Следовательно,

$$k(t) = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + h^2}.$$

5.2. Соприкасающаяся плоскость и кручение. Рассмотрим плоскости, проходящие через касательную к кривой Γ в точке M_0. В пространстве у кривой в данной точке имеется бесконечное множество таких плоскостей.

Определение 1. Плоскость, проходящая через касательную и через главную нормаль к кривой Γ в точке M_0, называется *соприкасающейся плоскостью к кривой* Γ в точке M_0.

Согласно этому определению, если $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0 \in \Gamma$, а $\boldsymbol{l}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и главной нормали в точке M_0, то соприкасающаяся плоскость в точке M_0 имеет уравнение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{l}, \mathbf{n}) = 0. \tag{1}$$

Отсюда и из формулы Тейлора:

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \boldsymbol{l}\Delta s + \frac{1}{2}k\mathbf{n}\Delta s^2 + o(\Delta s^2)$$

при $\Delta s \to 0$, следует, что кривая Γ с точностью до $o(\Delta s^2)$ при $\Delta s \to 0$ лежит в соприкасающейся плоскости. В частности, плоская кривая лежит в соприкасающейся плоскости.

Пусть кривая Γ, заданная уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, дважды дифференцируема и не имеет особых точек. Тогда вектор $\boldsymbol{l}$ коллинеарен вектору $\mathbf{r}'$, а вектор $\mathbf{n}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$.

Из уравнения (1) следует, что в этом случае соприкасающаяся плоскость к Γ в точке M_0 имеет уравнение

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0.$$

Очевидно, соприкасающаяся плоскость определена однозначно лишь в тех точках, где $[\mathbf{r}, \mathbf{r}''] \neq 0$.

Определение 2. Единичный вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{l}, \mathbf{n}]$ называется *бинормалью* кривой Γ в рассматриваемой точке.

Тройка единичных взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ называется *основным* (или *сопровождающим*) *репером* (или *трехгранником*) *кривой* Γ.

Пусть кривая Γ имеет представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — переменная длина дуги, и пусть функция $\mathbf{r}(s)$ трижды дифференцируема. Тогда

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \left[\frac{d\mathbf{l}}{ds}, \mathbf{n}\right] + \left[\mathbf{l}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right] = \left[\mathbf{l}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right],$$

так как $d\mathbf{l}/ds = k\mathbf{n}$.

Отсюда следует, что вектор $d\mathbf{b}/ds$ ортогонален вектору $\mathbf{l}$. Кроме того, он ортогонален вектору $\mathbf{b}$. Следовательно, он коллинеарен вектору $\mathbf{n}$, и поэтому существует число $\varkappa$ такое, что

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}. \tag{2}$$

Определение 3. Коэффициент $\varkappa$ в формуле (2) называется *кручением кривой* Γ в рассматриваемой точке.

Заметим, что кручение кривой может быть как положительным, так и отрицательным.

Из формулы (2) следует, что абсолютная величина кручения является скоростью вращения бинормали, или, что то же самое, скоростью вращения соприкасающейся плоскости.

5.3. Формулы Френе. Как известно, если $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ — основной репер кривой Γ, то

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = k\mathbf{n}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}, \tag{1}$$

где s — переменная длина дуги кривой Γ, а k и $\varkappa$ — кривизна и кручение кривой Γ в рассматриваемой точке.

Найдем разложение производной $d\mathbf{n}/ds$ по основному реперу.

Так как $\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{l}]$, то

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \left[\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \mathbf{l}\right] + \left[\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{l}}{ds}\right] = -\varkappa[\mathbf{n}, \mathbf{l}] + k[\mathbf{b}, \mathbf{n}].$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\boldsymbol{l} + \varkappa\mathbf{b}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называются *формулами Френе*.

Можно показать, что кривизна и кручение определяют пространственную кривую с точностью до положения в пространстве. Поэтому задание кривизны и кручения пространственной кривой как функции длины дуги называют *натуральными уравнениями* этой кривой.

5.4. Формула для вычисления кручения. Известно, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{l}, \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k\mathbf{n}. \tag{1}$$

Аналогично,

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\mathbf{n} + k\frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

а так как $d\mathbf{n}/ds = -k\boldsymbol{l} + \varkappa\mathbf{b}$, то

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\mathbf{n} - k^2\boldsymbol{l} + k\varkappa\mathbf{b}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) для смешанного произведения векторов $d\mathbf{r}/ds$, $d^2\mathbf{r}/ds^2$ и $d^3\mathbf{r}/ds^3$ получаем

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = k(\boldsymbol{l}, \mathbf{n}, \mathbf{b})k\varkappa = k^2\varkappa.$$

Следовательно,

$$\varkappa = \frac{1}{k^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right).$$

Выразив производные по s через производные по t, получим

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{k^2|\mathbf{r}'|^6}.$$

Наконец, подставив вместо k ее выражение через $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$, получим искомую формулу:

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}. \tag{3}$$

Пример. Найдем кручение винтовой линии

$$x = R\cos\omega t, \qquad y = R\sin\omega t, \qquad z = ht,$$

где $R > 0$, $\omega \neq 0$, $h \neq 0$.

Для этого воспользуемся формулой (3). В примере из п.5.1 мы показали, что

$$\|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']\| = R\omega^2\sqrt{h^2 + R^2\omega^2}.$$

Найдем теперь $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$:

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \begin{vmatrix} -R\omega^2 \sin\omega t & R\omega^2\cos\omega t & h \\ -R\omega^2\cos\omega t & -R\omega^2\sin\omega t & 0 \\ R\omega^3\sin\omega t & -R\omega^3\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = hR^2\omega^5.$$

Следовательно,

$$æ = \frac{h\omega}{h^2 + R^2\omega^2}.$$

В частности, если $h = \omega$, то $æ = 1/(1 + R^2)$.

Глава 6. Функции многих переменных

§ 1. Функции, отображения и многомерные пространства

1.1. Числовые функции двух, трех и большего числа переменных. До сих пор мы рассматривали функции одной переменной, когда по заданному правилу каждому числу из данного множества ставится в соответствие некоторое число или некоторый вектор. В этой главе рассмотрим простейшие вопросы теории числовых и векторных функций многих переменных, в частности, для таких функций изучим понятия непрерывности и дифференцируемости. Начнем с определения числовой функции двух переменных.

Напомним, что, согласно определению прямого произведения множеств (см. п.7.1 гл. I), множество всех упорядоченных пар действительных чисел — это прямое произведение множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Оно обозначается $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2$.

Определение 1. Пусть заданы множество $G \subset \mathbb{R}^2$ и некоторое правило f, которое каждой паре чисел $(x, y) \in G$ ставит в соответствие некоторое число $z = f(x, y)$. Тогда множество всевозможных троек $(x; y; f(x, y))$, $(x, y) \in G$, называется *числовой функцией двух переменных* (или *от двух переменных*) и обозначается либо просто f, либо $f(x, y)$, $(x, y) \in G$, либо $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$.

Множество G называется *областью определения* функции f и обозначается D_f, а множество всех $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, называется *множеством значений функции* f и обозначается $f(G)$.

Множество всех точек пространства с координатами $(x; y, f(x, y))$, $(x, y) \in G$, называется *графиком функции* f или *поверхностью, заданной уравнением* $z = f(x, y)$.

Для любой функции f функция, которая порождается тем же правилом соответствия f, но определена только на некотором множестве $G \subset D_f$, называется *сужением функции* f на множество G.

Если задана функция $z = f(x, y)$, то говорят, что *переменная* z *является функцией независимых переменных* x *и* y и иногда пишут $z = z(x, y)$.

Как и числовые функции одной переменной, числовые функции двух переменных часто задаются просто формулами, без указания области определения. В этом случае под областью определения функции понимают так называемую *естественную область определения*, т.е. множество всех упорядоченных пар чисел, для которых заданная формула имеет смысл.

Определение 2. Функция, заданная формулой

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)),$$

где f, φ и ψ — данные функции, называется *сложной функцией* или *композицией функций* f, φ и ψ.

Под областью определения сложной функции $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ понимают естественную область определения, т.е. множество всех пар $(x, y) \in D_\varphi \cap D_\psi$, таких, что пара значений $(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ принадлежит D_f.

Числовые функции трех и большего числа переменных определяются точно так же, как и числовые функции двух переменных.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим множество всех упорядоченных совокупностей из n действительных чисел. Очевидно,

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

и, вообще, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, если $n > 1$.

Определение 3. Пусть заданы множество $G \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое правило f, которое каждой совокупности $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ ставит в соответствие некоторое число $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда множество всевозможных совокупностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$, называется *числовой функцией от* n *переменных* и обозначается либо просто f, либо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$.

Следует отметить, что между функциями одной и функциями нескольких переменных имеются существенные различия. Однако переход от двух переменных к большему их числу, как правило, не представляет затруднений, поэтому во многих случаях, для краткости, подробно будем рассматривать только функции двух переменных.

1.2. Частные производные. Пусть дана функция $f(x, y)$ двух переменных x и y и пусть $(x_0, y_0) \in D_f$. Тогда, положив $y = y_0$, получим функцию $f(x, y_0)$ от одной переменной x, а при $x = x_0$

получим функцию $f(x_0, y)$ только от y. Производные этих функций одной переменной называются частными производными данной функции двух переменных по x и по y соответственно.

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда производная функции $f(x, y_0)$ в точке x_0 называется *частной производной функции* $f(x, y)$ *по* x при $x = x_0$, $y = y_0$ и обозначается $f'_x(x_0, y_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, а производная функции $f(x_0, y)$ в точке y_0 — *частной производной функции* $f(x, y)$ *по* y при $x = x_0$, $y = y_0$ и обозначается $f'_y(x_0, y_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Следовательно, производная $f'_x(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной в точке x_0 к кривой, заданной уравнением $z = f(x, y_0)$ на плоскости переменных x и z. Аналогичную геометрическую интерпретацию имеет и производная $f'_y(x_0, y_0)$.

Очевидно, о частной производной $f'_x(x_0, y_0)$ имеет смысл говорить только тогда, когда функция $f(x, y_0)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если эта окрестность левая (правая), то говорят о левой (соответственно, правой) частной производной. Аналогичные замечания относятся и к частной производной $f'_y(x_0, y_0)$.

Таким образом, согласно определению,

$$f'_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Аналогично определяются частные производные функции трех и большего числа переменных. Например,

$$f'_z(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}.$$

И вообще, частная производная от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по x_j, где $j = 1, 2, \ldots, n$, определяется равенством

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_j f}{\Delta x_j},$$

где $\Delta_j f$ — приращение функции f, соответствующее приращению Δx_j переменной x_j, т.е.

$$\Delta_j f = f(x_1, \ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

Так как частная производная — это производная от функции одной переменной, то для ее вычисления можно пользоваться всеми известными правилами дифференцирования, учитывая в каждом случае, какие переменные фиксированы, а какая является переменной дифференцирования.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление частных производных.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = x^3y - 2xy^2 + x^2 - y^2 + 3x - y + 13.$$

Решение. Фиксируя переменную y и дифференцируя по переменной x, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - 2y^2 + 2x + 3.$$

Аналогично, фиксируя x и дифференцируя по y, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^3 - 4xy - 2y - 1.$$

Пример 2. Найти частные производные функции

$$y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad n \geq 2.$$

Решение. Для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right).$$

А так как

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{n}(a_{jk} + a_{kj})x_j.$$

1.3. Функции точки и отображения. Напомним, что в случае функции одной переменной $y = f(x)$ значения переменной x часто отождествляют с соответствующими точками числовой оси, которую, как и множество всех действительных чисел, обозначают $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^1$. Например, говорят, что "функция задана в окрестности точки x_0", "функция непрерывна в точке x_0" и т.д.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ также удобно рассматривать пару (x, y) как координаты точки плоскости в некоторой декартовой системе координат и говорить об этой функции как о функции, заданной на некотором множестве точек плоскости. Аналогично в случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ удобно рассматривать тройку (x, y, z) как координаты точки пространства, в котором введена некоторая декартова система координат.

По аналогии с $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ множество $\mathbb{R}^n$ называется *n-мерным координатным пространством*, а его элементы — *точками n-мерного пространства*.

Если $M \in \mathbb{R}^n$ и $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *первой, второй, ..., n-й координатами точки* M соответственно.

Пользуясь введенной геометрической терминологией, определение числовой функции от n переменных можно сформулировать следующим образом.

Определение 1. Пусть заданы множество $G \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое правило f, которое каждой точке $M \in G$ ставит в соответствие некоторое число $y = f(M)$. Тогда множество всевозможных пар $(M; f(M))$, $M \in G$, называется *числовой функцией точки* из $\mathbb{R}^n$ или *числовой функцией от n переменных* и обозначается $f(M)$, $M \in G$, или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$.

Обобщением понятия числовой функции от n переменных является понятие отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Определение 2. Пусть заданы множество $G \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое правило f, которое каждой точке $M \in G$ ставит в соответствие некоторую точку $P = f(M) \in \mathbb{R}^m$. Тогда множество всевозможных пар $(M; f(M))$, $M \in G$, называется *отображением множества G в пространство* $\mathbb{R}^m$ и обозначается $f(M)$, $M \in G$, или $f: G \to \mathbb{R}^m$.

Точка $P = f(M)$ называется *образом точки* M, а точка M — *прообразом точки* P. Множество всех точек $P = f(M)$, $M \in G$, называется *образом множества* G и обозначается $f(G)$.

Согласно определению, любая точка $M \in G$ имеет единственный образ, однако некоторые точки $P \in f(G)$ могут иметь несколько прообразов.

Заметим, что отображение $f: G \to \mathbb{R}^1$, где $G \subset \mathbb{R}^n$, — это числовая функция от n переменных, а задание отображения $f: G \to \mathbb{R}^m$ равносильно заданию m числовых функций от n переменных (координат точки $P = f(M)$).

1.4. Многомерные пространства. Напомним, что точкой n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ называется любая упорядоченная совокупность из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точки пространства $\mathbb{R}^n$, как и в случае $n = 2$ и $n = 3$, будем обозначать большими буквами, например, A, B, M, P и т.д. Тогда, если $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами точки M.

По аналогии с $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ расстояние между двумя точками $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$ при любом n обозначается $|AB|$

и определяется по формуле

$$|AB| = \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Дадим теперь точное определение.

Определение 1. Множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n действительных чисел и в котором определено расстояние между его элементами по формуле (1), называется *n-мерным евклидовым пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ называются *точками n-мерного пространства* $\mathbb{R}^n$.

Во многих случаях точки пространства $\mathbb{R}^n$ удобно обозначать буквами a, b, x, y, z и т.д., а их координаты — теми же буквами с индексами:

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

и т.д. В этих случаях расстояние между точками, например x и y, обозначают $\rho(x, y)$, т.е.

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Расстояние в $\mathbb{R}^n$ обладает всеми свойствами обычного расстояния на плоскости и в пространстве:

1. $|AB| \geq 0$ для любых точек A и B, причем $|AB| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$;
2. $|AB| = |BA|$ для любых точек A и B;
3. $|AB| \leq |AC| + |CB|$ для любых точек A, B и C.

Свойства 1 и 2 очевидны. Свойство 3, называемое *неравенством треугольника*, хорошо известно на плоскости и в трехмерном пространстве. В общем случае оно будет доказано несколько позже, а сейчас определим еще n-мерное векторное пространство.

Определение 2. Множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n действительных чисел и в котором определены операция сложения двух любых элементов x и y и операция умножения произвольного элемента x на любое число λ по формулам:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

называется *n-мерным векторным пространством* или, более точно, *n-мерным арифметическим векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$ (как и точечное n-мерное пространство).

Элементы n-мерного векторного пространства называются *n-мерными векторами*. В дальнейшем их будем обозначать просто буквами: a, b, x, y и т.д., или жирными буквами: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и т.д., а их координаты — соответствующими буквами с индексами: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и т.д.

Вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ называется *нулевым вектором* или *нулем n-мерного векторного пространства*. Вектор $(-1)\mathbf{x}$ называется *противоположным вектору* $\mathbf{x}$ и обозначается $-\mathbf{x}$.

Как и в обычном трехмерном пространстве, если заданы две точки $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, то через $\overrightarrow{AB}$ будем обозначать вектор с координатами $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$. В частности, для любой точки $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — точка с координатами $(0, 0, \ldots, 0)$, называется *радиус-вектором точки M*. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками и векторами n-мерного пространства.

По аналогии с $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ определим *скалярное произведение* любых двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ по формуле:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{2}$$

Определение 3. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$, в котором введено скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по формуле (2), называется *евклидовым n-мерным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{E}^n$ или $\mathbb{R}^n$.

Легко видеть, что скалярное произведение в $\mathbb{E}^n$ обладает всеми свойствами обычного скалярного произведения векторов. Отметим лишь, что $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ для любого $\mathbf{x}$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Определение 4. Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ число $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ называется *длиной* (или *нормой*) *вектора* $\mathbf{x}$ и обозначается $|\mathbf{x}|$ (или $\|\mathbf{x}\|$):

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \tag{3}$$

Длина вектора обладает следующими свойствами:

1. $|\mathbf{x}| \geq 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$, причем $|\mathbf{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$ для любого вектора $\mathbf{x}$ и любого числа α;
3. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Свойства нормы (1) и (2) очевидны. Свойство (3), называемое *неравенством треугольника*, в общем случае необходимо доказывать. Сначала докажем одно полезное неравенство, называемое *неравенством Коши–Шварца*.

Лемма. *Для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *из* $\mathbf{E}^n$ *справедливо неравенство*

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|. \tag{4}$$

Доказательство. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$0 \le (\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y},\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y},\mathbf{y})$$

для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и любого числа λ. Если $(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ne 0$, то положив

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{(\mathbf{y},\mathbf{y})},$$

получим неравенство

$$0 \le (\mathbf{x},\mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})^2}{(\mathbf{y},\mathbf{y})},$$

из которого и следует неравенство (4). Если же $|\mathbf{y}| = 0$, то неравенство (4) очевидно. Лемма доказана.

Для доказательства неравенства треугольника заметим, что

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2.$$

А так как $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$, то

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2,$$

и, следовательно, $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$.

Наконец, для любых точек $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ справедливо равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Следовательно, $|\overrightarrow{AB}| \le |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$, т.е. $|AB| \le |AC| + |CB|$.

Таким образом, расстояние между точками, скалярное произведение векторов и длина вектора в $\mathbb{R}^n$, определенные по формулам (1), (2), (3), обладают всеми обычными свойствами. На основе этих понятий можно дать определения ограниченного множества, предела последовательности, непрерывной кривой и т.д. В качестве примера приведем определения ε-окрестности точки, ограниченного множества и непрерывной кривой.

Определение 5. Для любой точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $\varepsilon > 0$ множество всех точек $M \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $|MM_0| < \varepsilon$, обозначается $O_\varepsilon(M_0)$ и называется *ε-окрестностью точки* M_0 или *открытым шаром радиуса* ε *с центром в точке* M_0.

Очевидно, ε-окрестность точки x при $n = 1$ — это интервал длины 2ε с центром в точке x, при $n = 2$ — это круг радиуса ε с центром в точке $x = (x_1, x_2)$, а при $n = 3$ — это шар радиуса ε с центром в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Определение 6. Множество G точек из $\mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует число $r \geq 0$ такое, что

$$|OM| \leq r \quad \forall M \in G.$$

(Здесь O — точка с координатами $(0, 0, \ldots, 0)$.)

Для векторов определение ограниченного множества формулируется аналогично:

Множество векторов $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если

$$\exists r: \quad |\mathbf{x}| \leq r \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

Определение 7. Множество γ точек из $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $x_i(t)$ — непрерывные функции, определенные на некотором промежутке Δ, называется *непрерывной кривой*, а переменная t — *параметром кривой* γ.

Если Δ — отрезок $[a; b]$, то точка A с координатами $x_i = x_i(a)$ называется *началом*, а точка B с координатами $x_i = x_i(b)$ — *концом кривой* γ. В этом случае кривую γ будем обозначать $A\gamma B$ или $\breve{AB}$ и говорить, что *кривая γ соединяет точки A и B*.

Вместо ε-окрестностей, которые называются *сферическими*, иногда удобно пользоваться так называемыми *прямоугольными окрестностями*.

Определение 8. Для заданной точки $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ прямое произведение интервалов $O_{\delta_i}(x_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется *открытым прямоугольником с центром в точке* M_0 или *прямоугольной окрестностью точки* M_0 и обозначается $P(M_0; \delta_1, \ldots, \delta_n)$.

В случае, когда $\delta_i = \delta$ $\forall i$, прямоугольную окрестность точки M_0 будем обозначать $P_\delta(M_0)$.

Из очевидных неравенств

$$\max_i |x_i - x_i^0| \leq |MM_0| \leq \sqrt{n} \max_i |x_i - x_i^0|$$

следует, что

$$O_\delta(M_0) \subset P_\delta(M_0) \subset O_{\delta\sqrt{n}}(M_0).$$

Таким образом, любая сферическая окрестность точки M_0 содержит некоторую прямоугольную окрестность точки M_0 и наоборот.

§ 2. Пределы функций многих переменных

2.1. Пределы последовательностей точек. Последовательность точек M_k, $k \in \mathbb{N}$, пространства $\mathbb{R}^n$ определяется точно так же, как и последовательность точек числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Определение последовательности векторов $\mathbf{r}_k$, $k \in \mathbb{N}$, в случае $n = 2$ и $n = 3$ было дано в §1 гл. 5. В общем случае оно такое же.

Определение 1. Точка $M_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *пределом последовательности точек* M_k, $k \in \mathbb{N}$, из $\mathbb{R}^n$, если $\lim\limits_{k\to\infty} |M_k M_0| = 0$.

В этом случае будем писать:

$$M_0 = \lim_{k\to\infty} M_k \quad \text{или} \quad \text{" } M_k \to M_0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \text{ "}.$$

Аналогично, $\mathbf{a} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{a}_k$, если $\lim\limits_{k\to\infty} |\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| = 0$.

Как обычно, последовательность точек или векторов, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Определение предела последовательности точек можно сформулировать на языке окрестностей (сферических или прямоугольных): Точка M_0 называется *пределом последовательности* $\{M_k\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall k \geq N_\varepsilon, \quad M_k \in O_\varepsilon(M_0)$$

(или $M_k \in P_\varepsilon(M_0)$).

В § 1 гл. 5 было доказано, что последовательность векторов из $\mathbb{R}^3$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности из соответствующих координат этих векторов. Аналогичное утверждение имеет место и в общем случае.

Теорема 1. *Точка M_0 является пределом последовательности точек M_k, $k \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда координаты точки M_0 являются пределами последовательностей из соответствующих координат точек M_k.*

Доказать эту теорему в качестве упражнения.

Теорема 2. *У любой ограниченной последовательности точек из $\mathbb{R}^n$ существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{M_k\}$ — ограниченная последовательность точек из $\mathbb{R}^n$. Для простоты будем рассматривать случай $n = 2$ и считать, что $M_k = (x_k, y_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Из ограниченности последовательности $\{M_k\}$ следует ограниченность числовых последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса для числовых последовательностей, у последовательности $\{x_k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_p}\}$. Пусть она сходится к x_0. Аналогично ограниченная последовательность $\{y_{k_p}\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_{p_q}}\}$. Пусть она сходится к y_0.

Из теоремы 1 следует, что подпоследовательность $\{M_{k_{p_q}}\}$ последовательности $\{M_k\}$ сходится к точке $M_0 = (x_0, y_0)$ при $q \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Эту теорему, как и в случае числовых последовательностей, обычно называют *теоремой Больцано–Вейерштрасса*.

Определение 2. Последовательность точек M_k, $k \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе*, если она удовлетворяет следующему *условию Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall k \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad |M_k M_{k+p}| < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность точек из $\mathbb{R}^n$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство. Очевидно, если последовательность $\{M_k\}$ имеет предел, то она фундаментальная. Действительно, пусть $M_k \to M_0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall k \geq N_\varepsilon \quad |M_k M_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а так как

$$|M_k M_{k+p}| \leq |M_k M_0| + M_0 M_{k+p}$$

то $|M_k M_{k+p}| < \varepsilon \quad \forall k \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь последовательность $\{M_k\}$ фундаментальная. Тогда она ограниченная, и по теореме Больцано–Вейерштрасса у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{M_{k_p}\}$. Пусть M_0 — предел этой подпоследовательности. Докажем, что $M_k \to M_0$ при $k \to \infty$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_\varepsilon : \quad \forall k \geq N_\varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |M_k M_{k+p}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists K_\varepsilon : \quad \forall p \geq K_\varepsilon \quad |M_{k_p} M_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $p_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon; K_\varepsilon\}$. Тогда $p_\varepsilon \geq K_\varepsilon$, $n_{p_\varepsilon} \geq p_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ и, следовательно, для любого $k \geq N_\varepsilon$

$$|M_k M_0| \leq |M_k M_{k_{p_\varepsilon}}| + |M_{k_{p_\varepsilon}} M_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то этим доказано, что $\lim\limits_{k \to \infty} M_k = M_0$. Теорема 3 доказана.

Эта теорема, как и в случае $n = 1$, называется *критерием Коши*. Заметим, что доказательство для любого n дословно повторяет доказательство в случае $n = 1$.

Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ обладает следующим свойством: любая фундаментальная последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ в этом пространстве имеет предел. Это свойство называется *полнотой пространства* $\mathbb{R}^n$. Очевидно, пространство $\mathbb{Q}^n$, где $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных точек на прямой, согласно определению не является полным.

Для последовательностей точек и векторов рассматривают и бесконечные пределы.

Говорят, что *последовательность $\{M_k\}$ стремится к бесконечности*, и пишут $M_k \to \infty$ при $k \to \infty$, если $\lim\limits_{k \to \infty} |OM_k| = +\infty$.

Это определение можно сформулировать и на языке окрестностей. Для этого через $O_r(\infty)$ обозначим множество всех точек $M \in \mathbb{R}^n$, для которых $|OM| > r$. Тогда $M_k \to \infty$ при $k \to \infty$, если

$$\forall r > 0 \quad \exists K: \quad \forall k \geq K \quad M_k \in O_r(\infty).$$

2.2. Предел функции в точке. Как и ранее, множество всех точек δ-окрестности $O_\delta(M_0)$ точки M_0, отличных от M_0, будем называть *проколотой δ-окрестностью точки* M_0 и обозначать $\overset{\circ}{O}_\delta(M_0)$.

Определение 1. Точка M_0 называется *предельной точкой множества* G, если в любой проколотой окрестности точки M_0 содержится хотя бы одна точка множества G.

Определение 2. Пусть на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f(M)$, и пусть M_0 — предельная точка множества G. Число a называется *пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$* (или *в точке* M_0), если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall M \in \overset{\circ}{O}_\delta(M_0) \cap G \quad |f(M) - a| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = a.$$

Употребляют и другие обозначения. Например, для функции двух переменных $f(x, y)$ пишут

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a.$$

Как и в случае одного переменного, доказывается, что это определение предела функции в точке равносильно следующему.

Определение 3. Пусть M_0 — предельная точка множества G, на котором задана функция $f(M)$. Число a называется *пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$*, если для любой последовательности $\{M_k\}$ точек из G таких, что $M_k \neq M_0$ и $M_k \to M_0$ при $k \to \infty$, выполняется условие: $f(M_k) \to a$ при $k \to \infty$.

Аналогично определяют и *бесконечные пределы функции* $f(M)$ в точке M_0:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = +\infty, \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = -\infty.$$

В частности, функцию $f(M)$ называют *бесконечно большой* при $M \to M_0$ и пишут

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \infty,$$

если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall M \in D_f \cap \overset{\circ}{O}_\delta(M_0) \quad |f(M)| > \varepsilon.$$

Определение 4. Предел в точке M_0 сужения функции f на множество $E \subset D_f$ называется *пределом функции* $f(M)$ *при* $M \to M_0$ *по множеству* E.

В этом случае точка M_0 должна быть предельной точкой для множества E.

Если $E = \gamma \cap D_f$, где γ — некоторая кривая в $\mathbb{R}^n$, то этот предел называется *пределом по кривой* γ, а если γ — луч с направлением $l = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то — *пределом по направлению* l функции f в точке M_0.

Очевидно, если функция, определенная в некоторой проколотой окрестности точки M_0, имеет предел в этой точке, то она в этой точке имеет предел и по любому направлению. Обратное утверждение является неверным. Например, функция двух переменных $f(x, y)$, равная 1, если $y = x^2$, и 0, если $y \neq x^2$, в точке (0; 0) по любому направлению имеет предел, равный нулю. Однако она в точке (0; 0) не имеет предела, так как по параболе $y = x^2$ ее предел равен 1.

Отметим, что так как определения предела функции в точке почти дословно совпадают с определениями предела функции одной переменной, то для функций многих переменных справедливы теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного, аналогичные соответствующим теоремам для функций одной переменной.

Сформулировать и доказать эти теоремы в качестве упражнения.

2.3. Предел функции на бесконечности. Для функций многих переменных, как и для функций одной переменной, рассматривают пределы на бесконечности.

Определение. Пусть область определения функции $f(M)$ является неограниченной. Тогда число a называется *пределом функции* $f(M)$ при $M \to \infty$, если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall M \in D_f \cap \overset{\circ}{O}_\delta(\infty) \quad f(M) \in O_\varepsilon(a).$$

В этом случае пишут

$$\lim_{M \to \infty} f(M) = a$$

или

$$f(M) \to a \text{ при } \rho = |OM| \to +\infty.$$

Очевидно, определение этого предела можно сформулировать и на языке последовательностей. Вообще, на пределы в бесконечности естественным образом переносятся многие понятия и утверждения из предыдущего пункта. Следует лишь отметить, что для функций многих переменных рассматривают еще пределы при специальном стремлении точки в бесконечность. Обычно специфика стремления точки в бесконечность видна из самого обозначения. Например, запись

$$a = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$$

означает, что выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta: \quad \forall x > \delta,\ y > \delta \quad f(x,y) \in O_\varepsilon(a).$$

Аналогично, запись

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to-\infty}} f(x,y) = a$$

означает, что

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = a$$

для любой последовательности точек $(x_k, y_k) \in D_f$ такой, что $x_k \neq x_0$, $x_k \to x_0$ и $y_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Согласно этим определениям, функция

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{1+y^2}$$

не имеет предела при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$. Однако

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to+\infty}} f(x,y) = 0$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 = \pm\infty$. Заметим, что эта функция не имеет предела, когда $x \to +\infty$, $y \to y_0$, где $y_0 \in \mathbb{R}$.

2.4. Повторные пределы. Спецификой функций многих переменных являются так называемые *повторные пределы*, когда переходят к пределу сначала по одной переменной, потом по другой и т.д. Например, если функция $f(x,y)$ двух переменных x и y определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), кроме, может быть, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$, то можно рассматривать повторные пределы

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y), \qquad \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

В первом повторном пределе сначала при фиксированном $x \neq x_0$ ищется предел функции $f(x,y)$ при $y \to y_0$. Далее, если при любом $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 этот предел существует и равен, например, $\varphi(x)$, то затем находится предел функции $\varphi(x)$ при $x \to x_0$. Во втором пределе наоборот: сначала находят предел $f(x,y)$ при $x \to x_0$ для фиксированного $y \neq y_0$, а затем — предел при $y \to y_0$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на некотором множестве G, содержащем прямое произведение проколотых η-ок-*

рестностей точек x_0 и y_0, и пусть для любого фиксированного $y \in \overset{\circ}{O}_\eta(y_0)$ функция $f(x,y)$ при $x \to x_0$ имеет предел. Тогда, если функция $f(x,y)$ имеет предел при $(x,y) \to (x_0, y_0)$ по множеству $\overset{\circ}{O}_\eta(x_0) \times \overset{\circ}{O}_\eta(y_0)$, то повторный предел функции $f(x,y)$ сначала при $x \to x_0$, а затем при $y \to y_0$ существует и

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f(x,y) \to a$ при $(x,y) \to (x_0, y_0)$ по множеству $\overset{\circ}{O}_\eta(x_0) \times \overset{\circ}{O}_\eta(y_0)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |f(x,y) - a| < \varepsilon \quad \forall (x,y) \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{O}_\delta(y_0). \tag{2}$$

Пусть далее

$$\forall y \in \overset{\circ}{O}_\eta(y_0) \quad \lim_{x \to x_0} f(x,y) = g(y).$$

Тогда из неравенства (2) в пределе при $x \to x_0$ следует неравенство

$$|g(y) - a| \le \varepsilon \quad \forall y \in \overset{\circ}{O}_\delta(y_0),$$

и поэтому $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = a$. А это означает, что рассматриваемый повторный предел существует и справедлива формула (1). Теорема 1 доказана.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin(1/x)$.

Так как

$$|f(x,y)| \le x^2 + y^2 \quad \forall x \ne 0,$$

то $f(x,y) \to 0$ при $(x,y) \to (0;0)$ по области определения функции f.

Далее, предел $f(x,y)$ при $x \to 0$ для любого фиксированного $y \ne 0$ не существует, и поэтому не имеет смысла говорить о повторном пределе сначала при $x \to 0$, а затем при $y \to 0$.

Для второго повторного предела имеем:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} (x^2 + y^2) \sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$.

Она определена на всей плоскости, кроме точки $(0;0)$. Ее предел по прямой $y = kx$ при $x \to 0$ равен $k/(1+k^2)$.Следовательно, она не имеет предела при $(x,y) \to (0;0)$. Однако

$$\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \forall y \ne 0,$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \forall x \ne 0,$$

и поэтому оба повторных предела в точке $(0;0)$ существуют и равны нулю.

Сделаем несколько замечаний относительно доказанной теоремы 1. Формула (1) справедлива и в тех случаях, когда предел функции $f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ бесконечный или когда, например, $x \to +\infty$, $y \to +\infty$. Сформулируем одно из таких утверждений в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x > a$ и $y > b$, и пусть для любого фиксированного $y > b$ функция $f(x, y)$ имеет предел при $x \to +\infty$. Тогда, если функция $f(x, y)$ имеет предел (конечный или бесконечный) при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, то*

$$\lim_{y \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y).$$

Доказать эту теорему в качестве упражнения.

§ 3. Множества точек n-мерного пространства

3.1. Открытые множества. Определение открытых множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$ в случае произвольного $n \in \mathbb{N}$ почти дословно совпадает с соответствующим определением в случае $n = 1$ (см. § 7 гл. 1).

Определение 1. Точка M_0 называется *внутренней точкой множества* $G \subset \mathbb{R}^n$, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей ε-окрестностью, т.е. если

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad O_\varepsilon(M_0) \subset G.$$

Определение 2. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Пустое множество, по определению, считается открытым.

Лемма 1. *Для любого $r > 0$ и любой точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ множества*

$$A = \{M \in \mathbb{R}^n : |MM_0| < r\},$$
$$B = \{M \in \mathbb{R}^n : |MM_0| > r\}$$

являются открытыми.

Доказательство. Пусть $M_1 \in A$. Положим $\varepsilon = r - |M_0M_1|$. Тогда, если $M \in O_\varepsilon(M_1)$, то

$$|MM_0| \leq |MM_1| + |M_1M_0| < \varepsilon + |M_1M_0| = r,$$

т.е. $M \in A$. Следовательно, $O_\varepsilon(M_1) \subset A$.

Аналогично, если $M_2 \in B$, $\delta = |M_0M_2| - r$, то

$$\forall M \in O_\delta(M_2) \quad |MM_0| \geq |M_0M_2| - |M_2M| > r.$$

Следовательно, $O_\delta(M_2) \subset B$. Лемма 1 доказана.

Напомним, что множество A называется *открытым шаром радиуса* r *с центром в точке* M_0. Множество B называется *открытой внешностью шара радиуса* r *с центром в точке* M_0.

Таким образом, любая ε-окрестность любой точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством. Аналогично доказывается, что любая прямоугольная окрестность любой точки является открытым множеством. (Доказать в качестве упражнения.)

Лемма 2. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть множество G есть пересечение открытых множеств $G_1, G_2, \ldots, G_N$. Если множество G пустое, то оно открытое по определению. Если же оно непустое и $M_0 \in G$, то $M_0 \in G_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots, N$. А так как множества G_i открытые, то

$$\forall i \quad \exists \varepsilon_i > 0: \quad O_{\varepsilon_i}(M_0) \subset G_i.$$

Очевидно, если ε наименьшее из $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$, то $O_\varepsilon(M_0) \subset G_i$ $\forall i$, и поэтому $O_\varepsilon(M_0) \subset G$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что пересечение счетной совокупности открытых множеств не всегда будет открытым множеством. Например, пересечением интервалов $(-1/n; 1+1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, будет отрезок $[0; 1]$, который не является открытым множеством на прямой $\mathbb{R}^1$.

Лемма 3. *Объединение любой совокупности открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть множество G есть объединение некоторой совокупности открытых множеств. Тогда любая точка $M \in G$ принадлежит некоторому открытому множеству G_α этой совокупности, и поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(M) \subset G_\alpha \subset G$. Лемма 3 доказана.

Из доказанных лемм следует, что объединение любых окрестностей $O_{\varepsilon_M}(M)$ точек M любого множества является открытым множеством. Очевидно, и наоборот, любое открытое множество есть объединение окрестностей всех его точек.

Определение 3. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого множества G объединение ε-окрестностей всех точек $M \in G$ называется *ε-окрестностью множества* G и обозначается $O_\varepsilon(G)$.

До сих пор для точек из $\mathbb{R}^n$ рассматривались только ε-окрестности. Напомним, что на действительной прямой $\mathbb{R}^1$ под окрестностью данной точки понимался любой интервал, содержащий эту точку. В общем случае (когда есть понятие открытого множества) понятие окрестности точки обобщается следующим образом.

Определение 4. Любое открытое множество, содержащее точку M_0, называется *окрестностью точки* M_0 и обозначается $O(M_0)$.

Из этого определения и доказанных лемм следует, что пересечение любой конечной совокупности и объединение произвольной совокупности окрестностей данной точки являются окрестностями этой точки.

3.2. Замкнутые множества. Определение замкнутых множеств, которое будет дано в этом параграфе, несколько отличается от определения, данного в § 7 гл. 1, но, как легко видеть, в случае множеств на прямой эти определения эквивалентны.

Определение 1. Точка M_0 называется *точкой прикосновения множества* G, если в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка из G.

Определение 2. Множество всех точек прикосновения множества G называется *замыканием* множества G и обозначается $\overline{G}$.

Определение 3. Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием. Пустое множество тоже считается замкнутым.

Очевидно, для любого множества G все его точки и все его предельные точки являются точками прикосновения, и других точек прикосновения нет.

Лемма 1. *Замыкание любого множества есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $\overline{G}$ — замыкание множества G, а $\overline{\overline{G}}$ — замыкание множества $\overline{G}$. Очевидно, $\overline{G} \subset \overline{\overline{G}}$. Покажем, что $\overline{\overline{G}} \subset \overline{G}$.

Пусть $M_0 \in \overline{\overline{G}}$, т.е. M_0 — точка прикосновения множества $\overline{G}$. Тогда любая ее окрестность $O(M_0)$ содержит хотя бы одну точку M_1 множества $\overline{G}$. А так как M_1 — точка прикосновения множества G, и множество $O(M_0)$ — ее окрестность, то в $O(M_0)$ существует хотя бы одна точка множества G. Следовательно, $M_0 \in \overline{G}$. Лемма 1 доказана.

Напомним, что если $B \subset X$, то разность $X \setminus B$ называется дополнением множества B до множества X. Если же множество X фиксировано (например, $X = \mathbb{R}^n$) и рассматриваются только множества $B \subset X$, то разность $X \setminus B$ называется просто *дополнением множества* B. Здесь рассматриваются только множества $B \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 2. *Для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было открытым.*

Доказательство. Пусть множество F замкнуто и $G = \mathbb{R}^n \setminus F$. Тогда, если $M \in G$, то M не является точкой прикосновения для F, и поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(M) \subset G$. Следовательно, любая точка множества G внутренняя.

Наоборот, пусть множество $G = \mathbb{R}^n \setminus F$ открытое. Тогда, если $M \in \overline{F}$, то $M \notin G$, и, следовательно, $M \in F$. Лемма 2 доказана.

Из этого утверждения и леммы 1 п.3.1 следует, что для любого $r > 0$ и любой точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ множества

$$\overline{A} = \{M \in \mathbb{R}^n : |MM_0| \leq r\},$$

$$\overline{B} = \{M \in \mathbb{R}^n : |MM_0| \geq r\}$$

замкнутые. Множество $\overline{A}$ называется *замкнутым шаром* (или просто *шаром*) *радиуса* r *с центром в точке* M_0, а множество $\overline{B}$ — *замкнутой внешностью этого шара.*

Для любой совокупности множеств B_α и любого множества X справедливы равенства

$$X \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus B_\alpha),$$
$$X \setminus \bigcap_\alpha B_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus B_\alpha).$$

Первое равенство доказывается следующей цепочкой равносильных утверждений:

$$x \in X \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha \iff x \in X,\ x \notin B_\alpha \quad \forall \alpha \iff$$
$$\iff x \in X \setminus B_\alpha \quad \forall \alpha \iff x \in \cap (X \setminus B_\alpha).$$

Аналогично доказывается и второе равенство.

Лемма 3. *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. Как уже известно, если множество F_α замкнуто, то множество $G_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha$ открыто. Тогда из равенства $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ и леммы 3 п.3.1 следует, что множество $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ замкнуто. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. Если множества F_i, $i = 1, \ldots, N$, замкнутые, то множества $G_i = \mathbb{R}^n \setminus F_i$, $i = 1, \ldots, N$, открытые. Тогда из равенства $\bigcup\limits_{i=1}^{N} Fi = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{N} G_i$ и леммы 2 п.3.1 следует, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{N} F_i$ замкнутое. Лемма 4 доказана.

Следствие. *Если множество F замкнутое, а множество G открытое, то множество $F \setminus G$ замкнутое, а множество $G \setminus F$ открытое.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$F \setminus G = F \cap (\mathbb{R}^n \setminus G),$$

где множество $\mathbb{R}^n \setminus G'$ замкнутое. Следовательно, множество $F \setminus G$, как пересечение двух замкнутых множеств, является замкнутым. Аналогично, $G \setminus F = G \cap (\mathbb{R}^n \setminus F)$ и множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ открытое, поэтому множество $G \setminus F$ открытое. Следствие доказано.

3.3. Граница множества. Определение границы множества $G \subset \subset \mathbb{R}^n$ полностью совпадает с соответствующим определением в случае $n = 1$ (см. § 7 гл. 1).

Определение 1. Точка M_0 называется *граничной точкой множества* G если в любой ее окрестности имеются хотя бы одна точка множества G и хотя бы одна точка, не принадлежащая множеству G.

Из определения следует, что любая граничная точка множества G является граничной и для его дополнения. Точка $M_0 \notin G$ является граничной точкой для G тогда и только тогда, когда она предельная для G.

Определение 2. Множество всех граничных точек множества G называется *границей множества* G и обозначается ∂G.

Если, как обычно, $\overline{G}$ — замыкание множества G, а G^* — множество всех его внутренних точек, то, очевидно,

$$\overline{G} = G \cup \partial G, \quad G^* = G \setminus \partial G,$$
$$\overline{G} = G^* \cup \partial G, \quad G^* \cap \partial G = \varnothing .$$

Лемма. *Граница любого множества является замкнутым множеством.*

Действительно, для любого множества G справедливо равенство $\partial G = \overline{G} \setminus G^*$, где $\overline{G}$ — замкнутое множество, а G^* — открытое.

3.4. Компакты. Прежде всего сформулируем и докажем обобщение теоремы Кантора о вложенных отрезках на n-мерные кубы. Начнем с определений.

Определение 1. Прямое произведение любых n отрезков $[a_1; b_1], \ldots, [a_n; b_n]$ называется *замкнутым n-мерным прямоугольным параллелепипедом* с ребрами, параллельными осям координат. Если длины всех отрезков равны d, то это прямое произведение называется *замкнутым n-мерным кубом* с ребром длины d.

На плоскости, т.е. для $n = 2$, эти множества называются, как обычно, прямоугольниками и квадратами.

Любой замкнутый параллелепипед $P = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$ является замкнутым множеством пространства $\mathbb{R}^n$. Множество $P^* = = P \setminus \partial P$ называется *открытым прямоугольным параллелепипедом.* Легко видеть, что $P^* = (a_1; b_1) \times \ldots \times (a_n; b_n)$. (Доказать эти утверждения в качестве упражнения.)

Определение 2. Последовательность n-мерных кубов Q_k, $k \in \in \mathbb{N}$, называется *последовательностью вложенных кубов*, если $Q_{k+1} \subset Q_k \ \forall k$.

Лемма 1. *Любая последовательность вложенных замкнутых кубов имеет хотя бы одну общую точку. Причем, если последовательность длин ребер этих кубов стремится к нулю, то эта общая точка единственная.*

Доказательство. Пусть

$$Q_k = [a_1^k; b_1^k] \times \ldots \times [a_n^k; b_n^k], \quad k \in \mathbb{N},$$

$Q_{k+1} \subset Q_k$ $\forall k$ и $b_i^k - a_i^k = d_k$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Для любого i последовательность отрезков $[a_i^k; b_i^k]$ является вложенной и, следовательно, имеет хотя бы одну общую точку c_i. Тогда точка C с координатами $c_1, c_2, \ldots, c_n$ будет общей для всех кубов Q_k. Причем, если $d_k \to 0$ при $k \to 0$, то эта общая точка единственная. Лемма 1 доказана.

Определение 3. Некоторая совокупность множеств называется *покрытием* данного множества, если оно содержится в объединении этой совокупности множеств. Покрытие называется *открытым*, если все его множества открытые. Покрытие называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа множеств.

Лемма 2. *Из любого открытого покрытия ограниченного замкнутого множества точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить конечное покрытие этого множества.*

Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что существуют ограниченное замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое его открытое покрытие, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.

Так как множество F ограничено, то существует замкнутый куб Q с ребром длины d, содержащий это множество. Делением каждого ребра куба Q пополам построим последовательность вложенных замкнутых кубов Q_k, $k \in \mathbb{N}$, с ребрами длины $d/2^k$, удовлетворяющих условию: для любого k множество $F_k = F \cap Q_k$ не покрывается конечным числом множеств данного покрытия. Единственная общая точка M_0 кубов Q_k (см. лемму 1) будет точкой прикосновения множества F. Так как множество F замкнуто, то $M_0 \in F$.

По условию точка $M_0 \in F$ покрывается некоторым открытым множеством G_α из данного покрытия, поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(M_0) \subset G_\alpha$. С другой стороны, так как

$$|MM_0| \leq \sqrt{n} \cdot \frac{d}{2^k} \quad \forall M \in F_k,$$

то существует K такое, что

$$\forall k \geq K \quad F_k \subset O_\varepsilon(M_0) \subset G_\alpha.$$

Однако, в силу нашего предположения, множество F_k не покрывается конечным числом множеств данного покрытия. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверное. Лемма 2 доказана.

Эта лемма называется *леммой Гейне–Бореля о покрытии*.

Определение 4. Множество называется *компактным* или *компактом*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.

Теорема. *Для того чтобы множество $F \subset \mathbb{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Достаточность условия составляет содержание леммы Гейне–Бореля. Докажем необходимость.

Каждую точку $M \in F$ покроем окрестностью $O_1(M)$ (шаром радиуса 1 с центром в точке M). Так как множество F компактное, то существует конечное число единичных шаров, которые покрывают множество F, и поэтому оно ограничено. Докажем, что оно замкнуто.

Пусть M_0 — предельная точка множества F. Предположим, что $M_0 \notin F$, и построим последовательность открытых множеств

$$G_k = \mathbb{R}^n \setminus \overline{O}_{1/k}(M_0), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\overline{O}_{1/k}(M_0)$ — замкнутый шар радиуса $1/k$ с центром в точке M_0. Совокупность множеств G_k является покрытием множества F, но, очевидно, никакая конечная совокупность их не образует покрытия. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому $M_0 \in F$. Теорема доказана.

Эта теорема называется *критерием компактности в пространстве* $\mathbb{R}^n$.

3.5. Связные и линейно связные множества. Очевидно, любой n-мерный шар и любая n-мерная сфера являются связными множествами, а объединение двух непересекающихся замкнутых шаров не является связным множеством. Дадим точное определение этим понятиям.

Определение 1. Множество X называется *несвязным*, если существуют два непересекающихся открытых множества G_1 и G_2, каждое из которых пересекается с множеством X и объединение которых содержит X. В противном случае множество X называется *связным*.

Очевидно, если замыкание множества X является несвязным, то и само множество X несвязное. Следовательно, замыкание любого связного множества является связным множеством.

Лемма 1. *На прямой, т.е. в $\mathbb{R}^1$, любой промежуток является связным множеством, и других связных множеств нет.*

Доказательство. Предположим, что существует промежуток $\Delta \subset \mathbb{R}^1$, который не является связным множеством. Тогда, согласно определению, существуют открытые множества X и Y такие, что

$$X \cap Y = \varnothing, \quad \Delta \subset X \cup Y, \quad X \cap \Delta \neq \varnothing, \quad Y \cap \Delta \neq \varnothing .$$

Пусть $x \in X \cap \Delta$, $y \in Y \cap \Delta$ и $x < y$.

Отрезок $[x; y] \subset \Delta$ точкой $z = (x+y)/2$ разделим на два отрезка $[x; z]$ и $[z; y]$ и через $[x_1; y_1]$ обозначим тот отрезок, у которого левый конец принадлежит X, а правый — Y. Поступая таким образом и далее, построим последовательность вложенных отрезков $[x_n; y_n]$ таких, что $x_n \in X$, $y_n \in Y$. Как известно, эти отрезки имеют одну общую точку.

Пусть z_0 — общая точка отрезков $[x_n; y_n]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z_0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Отсюда следует, что точка z_0 является граничной как для X, так и для Y, а так как X и Y открытые, то $z_0 \notin X$ и $z_0 \notin Y$, что противоречит условию $z_0 \in \Delta \subset X \cup Y$. Следовательно, наше предположение неверное.

Докажем теперь, что если некоторое множество $M \subset \mathbb{R}^1$ связное, то M — промежуток.

Если M содержит только одну точку, то M — отрезок. Если M имеет две точки x и y, $x < y$, то $[x; y] \subset X$. Действительно, если предположить, что существует точка z такая, что $z \in [x; y]$, но $z \notin M$, то M будет несвязным, так как оно содержится в объединении непересекающихся интервалов $(-\infty; z)$ и $(z; +\infty)$. Следовательно, если $a = \inf M$, $b = \sup M$, то $(a; b) \subset M$ и, кроме того, множеству M могут принадлежать лишь a и b. Поэтому множество M — это один из промежутков с концами a и b. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Любая непрерывная кривая в $\mathbb{R}^n$ является связным множеством.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству первого утверждения леммы 1. Предлагается провести его в качестве упражнения.

Определение 2. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если $[M_1M_2] \subset X$ для любых точек M_1 и M_2 из X.

Лемма 3. *Любое выпуклое множество X является связным.*

Доказательство. Предположим, что множество X не является связным, т.е. существуют открытые непересекающиеся множества G_1 и G_2 такие, что

$$X \subset G_1 \cup G_2, \quad G_j \cap X \neq \varnothing, \quad j = 1, 2.$$

Тогда любой отрезок $[M_1M_2]$, у которого $M_j \in G_j \cap X$, $j = 1, 2$, является несвязным, так как $[M_1M_2] \subset X \subset G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Следовательно, наше предположение неверное. Лемма 3 доказана.

Определение 3. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству X.

Очевидно, любое выпуклое множество является линейно связным.

Лемма 4. *Любое линейно связное множество является связным.*

Доказательство этого утверждения точно такое же, как и доказательство леммы 3.

Заметим, что на прямой, т.е. в $\mathbb{R}^1$, линейно связными множествами являются только промежутки, поэтому на прямой замыкание любого линейно связного множества является линейно связным множеством. В общем случае это утверждение является неверным.

Пример 1. Пусть M — множество точек плоскости, которое является графиком функции $y = \sin(1/x)$, $x \in (0; 1]$. Очевидно, это множество линейно связное. Однако его замыкание $\overline{M}$ не будет линейно связным.

Множество $\overline{M}$ есть объединение множества M и отрезка $[-1; 1]$ на оси Oy. Из предположения, что некоторую точку из M можно соединить непрерывной кривой с некоторой точкой $(0; y_0)$, следует неверное утверждение:

$$y = \sin\frac{1}{x} \to y_0 \quad \text{при} \quad x \to +0.$$

Следовательно, множество $\overline{M}$ не является линейно связным. (Напомним, что $\overline{M}$, как замыкание связного множества, является связным множеством.)

Теорема. *Если открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ связно, то любые две точки из G можно соединить ломаной, целиком лежащей в G.*

Доказательство. Выберем некоторую точку $M_0 \in G$ и через G_0 обозначим множество всех точек из G, которые можно соединить с M_0 ломаной, целиком лежащей в G.

Множество G_0 открыто. Действительно, если $M_1 \in G_0$, то $M_1 \in G$, а так как G открыто, то существует $\delta > 0$ такое, что $O_\delta(M_1) \subset G$. Из выпуклости $O_\delta(M_1)$ следует, что если точка M принадлежит $O_\delta(M_1)$, то и отрезок $[M_1 M]$ принадлежит $O_\delta(M_1)$. Поэтому любую точку $M \in O_\delta(M_1)$ можно соединить с точкой M_0 ломаной, целиком лежащей в G. Следовательно, $O_\delta(M_1) \subset G_0$.

Кроме того, множество G_0 обладает следующим свойством: если A — его предельная точка и $A \in G$, то $A \in G_0$. Действительно, существует $\delta > 0$ такое, что $O_\delta(A) \subset G$, а так как A — предельная точка для G_0, то в $O_\delta(A)$ существует хотя бы одна точка $B \in G_0$. Тогда точка A отрезком $[AB]$ соединяется с точкой B и, следовательно, $A \in G_0$.

Из доказанного свойства множества G_0 следует, что $G \setminus G_0 = G \setminus \overline{G_0}$, где $\overline{G_0}$ — замыкание множества G_0. В частности, множество $G_1 = G \setminus G_0$ открыто.

Теперь, если предположить, что G_0 не совпадает с G, то G есть объединение двух открытых непустых множеств G_0 и $G_1 = G \setminus G_0$, что невозможно, так как множество G связное. Следовательно, $G = G_0$, а в G_0 любые две точки M и M' можно соединить ломаной, целиком лежащей в G: для этого сначала M соединим с M_0, а затем — M_0 с M'. Теорема доказана.

Следствие. *Любое открытое связное множество линейно связно.*

Определение 4. Открытое связное множество называется *областью*. Замыкание области называется *замкнутой областью*.

Отметим, что замкнутая область может быть линейно несвязным множеством.

Пример 2. Пусть G — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$0 < x < 1, \quad \sin\frac{1}{x} < y < \sin\frac{1}{x} + x.$$

Очевидно, множество G открыто и линейно связно. Его замыкание $\overline{G}$ есть объединение множества

$$\left\{(x, y) : 0 < x \leq 1, \quad \sin\frac{1}{x} \leq y \leq \sin\frac{1}{x} + x\right\}$$

и отрезка $[-1; 1]$ на оси Oy. Предположим, что точку $(x_1; y_1) \in G$ можно соединить с некоторой точкой $(0; y_0)$ непрерывной кривой, которая лежит в $\overline{G}$ и имеет представление $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0; 1]$, причем $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$. Тогда $x(t) \to +0$ и $y(t) \to y_0$ при $t \to +0$. Однако из неравенств

$$\sin\frac{1}{x(t)} \leq y(t) \leq \sin\frac{1}{x(t)} + x(t)$$

следует, что $y(t)$ не имеет предела при $t \to +0$. Следовательно, наше предположение неверное.

3.6. Расстояние между множествами. Сначала определим расстояние от точки до множества.

Определение 1. Для любой точки A и любого множества X неотрицательное число, равное точной нижней грани расстояний $|AM|$, где $M \in X$, называется *расстоянием от точки A до множества X* и обозначается $\rho(A; X)$.

Таким образом,

$$\rho(A; X) = \inf_{M \in X} |AM|.$$

Очевидно, если $\rho(A; X) > 0$, то $A \notin X$ и, более того, $A \notin \overline{X}$, где $\overline{X}$ — замыкание множества X.

Лемма 1. *Если множество $F \subset \mathbb{R}^n$ замкнутое, то для любой точки $A \in \mathbb{R}^n$ существует точка $M_0 \in F$ такая, что $\rho(A; F) = |AM_0|$.*

Доказательство. Если $A \in F$, то, очевидно, $M_0 = A$. В общем случае, существует последовательность точек $M_k \in F$ таких, что

$$\rho(A; F) = \lim_{k \to \infty} |AM_k|.$$

Так как числовая последовательность $|AM_k|$, $k \in \mathbb{N}$, ограничена, то точки M_k лежат в некотором шаре с центром в точке A, и поэтому последовательность $\{M_k\}$ ограничена. Пусть $\{M_{k_p}\}$ — ее сходящаяся подпоследовательность, и пусть $M_{k_p} \to M_0$ при $p \to \infty$. Тогда

$$\rho(A; F) = \lim_{p\to\infty} |AM_{k_p}| = |AM_0|,$$

причем $M_0 \in F$, так как F замкнуто. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Для того чтобы точка принадлежала замкнутому множеству, необходимо и достаточно, чтобы расстояние от точки до множества равнялось нулю.*

Заметим, что здесь условие замкнутости множества является существенным, так как, например, если множество G открытое и $A \in \partial G$, то, очевидно, $A \notin G$, но $\rho(A; G) = 0$.

Определение 2. Для любых двух множеств X и Y неотрицательное число, равное $\inf |AB|$, где $A \in X$, $B \in Y$, называется *расстоянием между множествами* X *и* Y и обозначается $\rho(X; Y)$.

Лемма 2. *Если множества F и F' замкнуты и одно из них ограничено, то существуют точки $M_0 \in F$ и $M_0' \in F'$ такие, что $\rho(F, F') = |M_0M_0'|$.*

Доказательство. Если множества F и F' пересекаются и $A \in F \cap F'$, то, очевидно, $M_0 = M_0' = A$. В общем случае существуют две последовательности точек $M_k \in F$ и $M_k' \in F'$ таких, что

$$\rho(F; F') = \lim_{k\to\infty} |M_kM_k'|.$$

Пусть, например, множество F ограничено. Тогда последовательность $\{M_k\}$ ограничена, и поэтому у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{M_{k_p}\}$. Пусть $M_{k_p} \to M_0$ при $p \to \infty$. Тогда

$$\Big||M_0M_{k_p}'| - |M_{k_p}'M_{k_p}|\Big| \le |M_0M_{k_p}| \to 0$$

при $p \to \infty$, и поэтому

$$\rho(F; F') = \lim_{p\to\infty} |M_0M_{k_p}'|.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{M_{k_p}'\}$ ограничена и у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Пусть M_0' — предел этой подпоследовательности. Тогда $\rho(F; F') = |M_0M_0'|$, причем $M_0 \in F$ и $M_0' \in F'$, так как множества F и F' замкнутые. Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Если два замкнутых множества не пересекаются и одно из них ограничено, то расстояние между ними больше нуля.*

Заметим, что здесь условие ограниченности одного из замкнутых множеств является существенным. Например, если F_1 и F_2 — графики функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, $x \ge 2$, то, очевидно, F_1 и F_2 замкнуты и не пересекаются, однако $\rho(F_1; F_2) = 0$.

§ 4. Непрерывные функции и отображения

4.1. Свойства функций и отображений, непрерывных в точке. В случае многих переменных определения непрерывности функции в точке и на множестве точно такие же, как и для функций одной переменной.

Определение 1. Функция $y = f(M)$, $M \in G$, называется *непрерывной в точке* $M_0 \in G$, если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall M \in O_\delta(M_0) \cap G \quad f(M) \in O_\varepsilon(y_0), \tag{1}$$

где $y_0 = f(M_0)$.

Очевидно, если M_0 — предельная точка множества G, то $f(M)$ непрерывна в точке M_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

А если функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0, т.е. точка M_0 является внутренней точкой множества D_f, то условие (1) можно заменить условием

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall M \in O_\delta(M_0) \quad f(M) \in O_\varepsilon(y_0).$$

Для функций многих переменных справедливы теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения непрерывных функций. Их формулировки и доказательства по существу те же самые, что и для функций одной переменной. Предлагается в качестве упражнения сформулировать и доказать эти теоремы.

Чтобы сформулировать теорему о непрерывности сложной функции, дадим определение непрерывности отображения.

Определение 2. Отображение $P = f(M)$ действующее из множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, называется *непрерывным в точке* $M_0 \in G$, если выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall M \in O_\delta(M_0) \cap G \quad f(M) \in O_\varepsilon(P_0),$$

где $P_0 = f(M_0)$.

Пусть точка $P = f(M)$ имеет координаты $y_j = f_j(M)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда, очевидно, отображение f непрерывно в точке M_0 тогда и только тогда, когда функции $y_j = f_j(M)$ непрерывны в точке M_0.

Если отображение f непрерывно в каждой точке множества G, то оно называется *непрерывным на множестве* G.

Теперь сформулируем и докажем *теорему о непрерывности композиции непрерывных отображений*, которая является естественным обобщением теоремы о непрерывности сложной функции.

Пусть заданы отображения $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ и $t \in \mathbb{R}^k$, и пусть D_f и D_φ — области определения этих отображений.

Теорема. *Если отображение $x = \varphi(t)$ непрерывно в точке t_0, а отображение $y = f(x)$ непрерывно в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то отображение $y = f(\varphi(t))$ непрерывно в точке t_0.*

Доказательство. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности отображения f в точке x_0,

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O_\varepsilon(y_0), \tag{2}$$

где $y_0 = f(x_0)$. Далее, в силу непрерывности отображения φ в точке t_0,

$$\exists \eta > 0 : \quad \forall t \in O_\eta(t_0) \cap D_\varphi \quad \varphi(t) \in O_\delta(x_0). \tag{3}$$

Через G обозначим множество, где определено отображение $y = f(\varphi(t))$. Очевидно, $t_0 \in G$ и $G \subset D_\varphi$. Тогда из условий (2) и (3) следует, что

$$\forall t \in O_\eta(t_0) \cap G \quad f(\varphi(t)) \in O_\varepsilon(y_0).$$

Теорема доказана.

Вместо точечного отображения $P = f(M)$, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, можно рассматривать соответствующую векторную функцию $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Для векторных функций справедлива теорема о непрерывности линейной комбинации непрерывных функций. (Сформулировать и доказать в качестве упражнения.)

4.2. Свойства функций и отображений, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах. Как и для числовых функций, для отображений, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если отображение f, действующее из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, непрерывно на ограниченном замкнутом множестве G, то множество $f(G)$ тоже ограниченное и замкнутое.*

Доказательство. Пусть P_0 — предельная точка множества $f(G)$. Тогда, согласно определению предельной точки, существует последовательность $\{P_k\}$ такая, что $P_k \in f(G)$, $P_k \neq P_0$ $\forall k$ и $P_k \to P_0$ при $k \to \infty$. Пусть $P_k = f(M_k)$, $M_k \in G$.

Так как множество G ограничено, то последовательность $\{M_k\}$ тоже ограничена, и поэтому у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{M_{k_p}\}$ Пусть эта подпоследовательность сходится к точке M_0. Очевидно, точка M_0 является предельной точкой множества G, а так как множество G замкнутое, то $M_0 \in G$.

Из непрерывности отображения f в точке M_0 следует, что

$$\lim_{p\to\infty} f(M_{k_p}) = f(M_0) = P_0,$$

и поэтому $P_0 \in f(G)$. Следовательно, множество $f(G)$ содержит любую свою предельную точку, т.е. оно замкнутое. Кроме того, любая его предельная точка P_0 является образом некоторой точки $M_0 \in G$, и поэтому является конечной. Отсюда следует, что множество $f(G)$ ограниченное. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $y = f(M)$, $M \in G$, непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $G \subset \mathbb{R}^1$, то множество $f(G) \subset \mathbb{R}^1$ тоже ограниченное и замкнутое. В частности, среди элементов множества $f(G)$ есть как наибольшее, так и наименьшее.*

Как известно, ограниченное замкнутое множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ является *компактом*. В этих терминах доказанную теорему можно сформулировать так:

При непрерывном отображении образом компакта является компакт.

4.3. Свойства функций и отображений, непрерывных на линейно связных множествах. В этом пункте обобщим теорему о промежуточных значениях непрерывной функции на случай многих переменных.

Теорема 1. *Если функция $y = f(M)$ $M \in G$, непрерывна на линейно связном множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и принимает на G значения a и b, $a < b$, то она на G принимает и любое значение $c \in (a; b)$.*

Доказательство. Пусть $a = f(A)$, $b = f(B)$, $A \in G$, $B \in G$. Соединим точки A и B непрерывной кривой $A\gamma B \subset G$. Пусть эта кривая имеет представление

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \tag{1}$$

причем $\mathbf{x}(\alpha)$ и $\mathbf{x}(\beta)$ — радиус-векторы точек A и B.

Из теоремы о непрерывности сложной функции следует, что функция $y = f(\mathbf{x}(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$. Кроме того,

$$f(\mathbf{x}(\alpha)) = a, \quad f(\mathbf{x}((\beta)) = b.$$

Тогда из теоремы о промежуточных значениях числовой функции одной переменной следует, что эта функция на отрезке $[\alpha; \beta]$ принимает любое значение $c \in (a; b)$. А так как она является сужением данной функции, то теорема 1 доказана.

Теперь сформулируем и докажем аналогичную теорему для непрерывных отображений.

Теорема 2. *Если отображение f, действующее из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, непрерывно на линейно связном множестве G, то множество $f(G)$ тоже линейно связное.*

Доказательство. Пусть $P = f(A)$, $Q = f(B)$, $A \in G$, $B \in G$. Соединим точки A и B непрерывной кривой $A\gamma B \subset G$. Пусть эта кривая имеет представление (1).

Очевидно, $f(\mathbf{x}(t)) \in f(G)$ $\forall t \in [\alpha; \beta]$ и $f(\mathbf{x}(\alpha)) = P$, $f(\mathbf{x}(\beta)) = Q$.

Из теоремы о непрерывности композиции непрерывных отображений следует, что векторная функция $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$. Она задает непрерывную кривую, которая лежит в $f(G)$ и соединяет точки P и Q. Следовательно, множество $f(G)$ линейно связное. Теорема 2 доказана.

Таким образом, *при непрерывном отображении образом линейно связного множества является линейно связное множество.*

В следующем пункте будет доказано аналогичное утверждение для связных множеств.

4.4. Свойства отображений, непрерывных на открытых множествах. Пусть f — некоторое отображение множества G n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ в m-мерное пространство $\mathbb{R}^m$. Тогда для любого множества $B \subset \mathbb{R}^m$ множество всех $x \in G$ таких, что $f(x) \in B$, называется *прообразом* или *полным прообразом множества* B и обозначается $f^{-1}(B)$. Таким образом,

$$f^{-1}(B) = \{x \in G : \ f(x) \in B\}.$$

В частности, если $B \cap f(G) = \varnothing$, то $f^{-1}(B) = \varnothing$.

Теорема 1. *Отображение f открытого множества G пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ непрерывно на G тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть отображение $y = f(x)$ определено и непрерывно на открытом множестве G. Покажем, что прообраз любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ есть открытое множество.

Если множество $f^{-1}(U)$ пустое, то утверждение очевидное. Пусть это множество непустое, и пусть $x_0 \in f^{-1}(U)$. Тогда $y_0 = f(x_0) \in U$ и, кроме того,

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad O_\varepsilon(y_0) \subset U, \tag{1}$$

так как множество U открытое. А в силу непрерывности отображения f в точке x_0,

$$\exists \delta > 0 : \quad f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(y_0). \tag{2}$$

Из утверждений (1) и (2) следует, что

$$\exists \delta > 0 : \quad O_\delta(x_0) \subset f^{-1}(O_\varepsilon(y_0)) \subset f^{-1}(U),$$

т.е. точка x_0 является внутренней для $f^{-1}(U)$. Следовательно, множество $f^{-1}(U)$ открытое.

Пусть теперь отображение f такое, что полный прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества U является открытым множеством. Покажем, что оно непрерывно в любой точке $x_0 \in G$.

Пусть $y_0 = f(x_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $f^{-1}(O_\varepsilon(y_0))$ открытое, $x_0 \in f^{-1}(O_\varepsilon(y_0))$, и поэтому

$$\exists\delta > 0: \quad O_\delta(x_0) \subset f^{-1}(O_\varepsilon(y_0)).$$

Следовательно,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(y_0),$$

т.е. отображение f непрерывно в точке x_0. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть отображение $y = f(x)$ непрерывно на открытом множестве G. Тогда, если множество $X \subset G$ связно, то множество $f(X)$ тоже связно.*

Доказательство. Предположим, что множество $f(X)$ несвязное. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2 такие, что

$$f(X) \subset G_1 \cup G_2, \quad f(X) \cap G_j \neq \varnothing, \quad j = 1,2.$$

По теореме 1 множества $f^{-1}(G_j)$, $j = 1,2$, открытые. Кроме того, легко видеть, что они не пересекаются, их объединение содержит X и каждое из них пересекается с X. А это означает, что множество X несвязное, и поэтому наше предположение неверное. Теорема 2 доказана.

4.5. Равномерно непрерывные функции и отображения. Напомним, что функция $f(M)$, $M \in G$, называется непрерывной на множестве G, если она непрерывна в каждой его точке, т.е. если выполняется условие:

$$\forall M_0 \in G \;\; \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0: \forall M \in G,\ |MM_0|<\delta: |f(M)-f(M_0)|<\varepsilon. \quad (1)$$

Заметим, что здесь δ зависит как от ε, так и от M_0.

Определение 1. Функция $f(M)$, $M \in G$, называется *равномерно непрерывной на множестве* G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек M и M' из G, удовлетворяющих условию $|MM'| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon.$$

Условие равномерной непрерывности функции f на множестве G в логических символах выглядит следующим образом:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \quad \forall M, M' \in G,\ |MM'| < \delta: \ |f(M) - f(M')| < \varepsilon. \quad (2)$$

Заметим, что здесь δ зависит только от ε.

Очевидно, если выполнено условие (2), то и выполнено условие (1), т.е. если функция равномерно непрерывна на некотором множестве, то она непрерывна в любой точке этого множества. Как показывают примеры, обратное утверждение является неверным.

Определение 2. Для любой функции $f(M)$, $M \in G$, величина

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|MM'|<\delta} |f(M) - f(M')|$$

где $M \in G$ и $M' \in G$, называется *модулем непрерывности функции* f на множестве G.

Из определения следует, что модуль непрерывности любой функции — это функция, которая определена для любого $\delta > 0$, может принимать лишь неотрицательные значения и значение $+\infty$ и, очевидно, является монотонно возрастающей.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(M)$, $M \in G$, была равномерно непрерывной на множестве G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть функция $f(M)$ равномерно непрерывна на множестве G. Тогда, согласно условию (2),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0: \quad |f(M) - f(M')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любых M и M' из G, удовлетворяющих условию $|MM'| < \eta$. Отсюда следует, что

$$\forall \delta \in (0; \eta) \quad \omega_f(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом доказано, что из условия (2) следует условие (3), т.е. условие (3) является необходимым для равномерной непрерывности функции f на множестве G.

Достаточность условия (3) следует из того, что если $|MM'| < \delta$, то

$$|f(M) - f(M')| \leq \omega_f(\delta).$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1. Функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно, по теореме Лагранжа о среднем, для любых x_1 и x_2 существует ξ, лежащее между x_1 и x_2, такое, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Отсюда следует, что

$$\omega_f(\delta) \leq \delta \quad \forall \delta > 0,$$

и поэтому $\omega_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. По теореме 1 функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 2. Функция $f(x) = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0; 1)$.

Это утверждение следует из того, что

$$\omega_f(\delta) = 2 \quad \forall \delta > 0.$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ при разных α и на разных промежутках $\Delta \subset (0;+\infty)$.

1. Функция $f(x) = x^\alpha$ при любом α равномерно непрерывна на любом отрезке $[a;b]$, у которого $a > 0$.

Действительно, из теоремы Лагранжа о среднем следует, что

$$\omega_f(\delta) \le C\delta \quad \forall \delta > 0,$$

где $C = |\alpha| a^{\alpha-1}$, если $\alpha \le 1$, и $C = \alpha b^{\alpha-1}$, если $\alpha \ge 1$.

2. Если $0 < \alpha \le 1$, то функция $f(x) = x^\alpha$ равномерно непрерывна на $(0;+\infty)$.

Для доказательства заметим, что разность $(x+\delta)^\alpha - x^\alpha$, как функция от x, при рассматриваемых α монотонно убывает. Следовательно,

$$\omega_f(\delta) = \delta^\alpha \quad \forall \delta > 0.$$

3. При любом $\alpha < 0$ функция $f(x) = x^\alpha$ на любом интервале вида $(a;+\infty)$, где $a > 0$, равномерно непрерывна, а на любом интервале вида $(0;a)$ не будет равномерно непрерывной.

Действительно, на интервале $(a;+\infty)$

$$\omega_f(\delta) \le |\alpha| a^{\alpha-1}\delta \quad \forall \delta > 0,$$

а на интервале $(0;a)$

$$\omega_f(\delta) = +\infty \quad \forall \delta > 0.$$

4. При любом $\alpha > 1$ функция $f(x) = x^\alpha$ на любом конечном интервале $(0;a)$ равномерно непрерывна, а на любом бесконечном интервале $(a;+\infty)$ не будет равномерно непрерывной.

Это следует из того, что на конечном интервале $(0;a)$

$$\omega_f(\delta) \le \alpha a^{\alpha-1}\delta \quad \forall \delta > 0,$$

а на бесконечном интервале $(a;+\infty)$

$$\omega_f(\delta) \ge (x+\delta)^\alpha - x^\alpha \ge \alpha x^{\alpha-1}\delta \quad \forall x > a,$$

и поэтому $\omega_f(\delta) = +\infty$ $\forall \delta > 0$.

Теорема 2. *Если функция $f(M)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на G.*

Доказательство. Доказывать будем методом от противного.

Предположим, что функция $f(M)$ не является равномерно непрерывной на G. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall \delta > 0 \quad \exists M, M' \in G: \ |MM'| < \delta, \quad |f(M) - f(M')| \ge \varepsilon_0.$$

Через M_k и M'_k обозначим точки из этого условия, которые соответствуют $\delta = 1/k$, т.е. M_k и M'_k принадлежат множеству G и такие, что

$$|M_k M'_k| < \frac{1}{k}, \quad |f(M_k) - f(M'_k)| \geq \varepsilon_0. \tag{4}$$

Так как множество G ограничено, то последовательность $\{M_k\}$ ограничена, и поэтому у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{M_{k_p}\}$. Пусть

$$\lim_{p\to\infty} M_{k_p} = M_0.$$

Отсюда и из условия $|M_k M'_k| < 1/k$ следует, что

$$\lim_{p\to\infty} M'_{k_p} = M_0.$$

А так как множество G замкнуто, то $M_0 \in G$.

Функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0, поэтому

$$|f(M_{k_p}) - f(M'_{k_p})| \leq |f(M_{k_p}) - f(M_0)| + |f(M_0) - f(M'_{k_p})| \to 0$$

при $p \to \infty$, что противоречит условию (4), которое следует из нашего предположения. Следовательно, это предположение неверное. Теорема 2 доказана.

Эту теорему иногда называют *теоремой Кантора о равномерной непрерывности*. Кратко ее формулируют так:

Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.

Как следует из рассмотренных примеров, все условия теоремы 2 существенны.

Следствие. *Если функция непрерывна на некотором отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

В конце заметим, что для отображений, как и для функций, определяются равномерная непрерывность и модуль непрерывности и доказываются теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2.

Отображение $f : G \to \mathbf{R}^m$ называется *равномерно непрерывным на множестве* G, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall M, M' \in G, \quad |MM'| < \delta : \quad |f(M)f(M')| < \varepsilon.$$

Величина

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|MM'|<\delta} |f(M)f(M')|,$$

где $M \in G$ и $M' \in G$, называется *модулем непрерывности отображения* f *на множестве* G.

Теорема 3. *Отображение* $f(M)$, $M \in G$, *равномерно непрерывно на множестве* G *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Если отображение f непрерывно на некотором компакте G, то оно равномерно непрерывно на G.*

Доказательство. Из непрерывности отображения f на множестве G следует, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\forall M_\alpha \in G \quad \exists \delta_\alpha > 0: \quad \forall M \in O_{\delta_\alpha}(M_\alpha) \cap G \quad |f(M)f(M_\alpha)| < \varepsilon.$$

Совокупность всех открытых множеств $O_{\delta_\alpha/2}(M_\alpha)$ является покрытием компакта G. Выберем из этой совокупности конечное покрытие:

$$O_{\delta_1/2}(M_1), \ldots, O_{\delta_N/2}(M_N).$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$. Тогда для любых точек M и M' из G таких, что $|M'M| < \delta/2$, выполняется условие

$$\exists i: \quad M \in O_{\delta_i/2}(M_i), \quad M' \in O_{\delta_i}(M_i),$$

и поэтому

$$|f(M)f(M')| \leq |f(M)f(M_i)| + |f(M_i)f(M')| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых точек M и M' из G таких, что $|M'M| < \delta/2$, справедливо неравенство $|f(M)f(M')| < 2\varepsilon$. Очевидно, отсюда следует, что отображение f равномерно непрерывно на G. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 4 существенно отличается от доказательства теоремы 2. Оно примечательно тем, что справедливо для любых отображений, непрерывных на компактах.

§ 5. Дифференцируемые функции и их свойства

5.1. Определения. Для большей наглядности и простоты сначала рассмотрим функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), и пусть $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Тогда разность

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называется *полным приращением функции f в точке* (x_0, y_0).

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x_0, y_0), если она определена в некоторой окрестности этой точки и если существуют постоянные A и B такие, что

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma(x, y)\rho, \tag{1}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и $\gamma(x, y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Обычно условие (1) записывают короче:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Заметим, что условие (1) эквивалентно условию

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(x,y)\Delta x + \beta(x,y)\Delta y, \tag{2}$$

где $\alpha(x,y) \to 0$ и $\beta(x,y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Действительно, из условия (1) следует условие (2), в котором

$$\alpha = \gamma\frac{\Delta x}{\rho}, \quad \beta = \gamma\frac{\Delta y}{\rho},$$

так как $\gamma\rho = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, $|\alpha| \le |\gamma|$, $|\beta| \le |\gamma|$.

С другой стороны, из условия (2) следует условие (1), в котором

$$\gamma = \alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}, \quad |\gamma| \le |\alpha| + |\beta|.$$

Теорема 1. *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то в этой точке она непрерывна и имеет частные производные f'_x и f'_y.*

Доказательство. Первое утверждение является очевидным. Для доказательства существования $f'_x(x_0, y_0)$ в условии (2) положим $y = y_0$. В результате получим равенство

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(x, y_0)\Delta x,$$

где $\Delta_x z = f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и $\alpha(x, y_0) \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ существует и равна A.

Аналогично, положив $x = x_0$, получим $f'_y(x_0, y_0) = B$. Теорема 1 доказана.

Определение 2. Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то линейная функция

$$f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \tag{3}$$

от переменных Δx и Δy называется *полным дифференциалом* или просто *дифференциалом функции f в точке* (x_0, y_0) и обозначается $df(x_0, y_0)$ или dz. В этом случае переменные Δx и Δy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначаются dx и dy.

Таким образом,

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy, \tag{4}$$

$$\Delta z = dz + o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{5}$$

Заметим, что в формулах (1) и (2) Δx и Δy такие, что точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит области определения функции f, а линейная функция (3) определена для любых $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$.

Из формул (4) и (5) следует, что *дифференциал функции равен главной линейной части приращения функции* (относительно приращения независимых переменных). Иногда это свойство дифференциала берется в качестве его определения.

Для функций одной переменной дифференцируемость равносильна существованию конечной производной в рассматриваемой точке. В случае двух переменных существование частных производных не является достаточным даже для непрерывности функции. Например, функция

$$f(x, y) = \operatorname{sgn} xy$$

разрывна в точке $(0;0)$, однако в этой точке она имеет обе частные производные f'_x и f'_y, равные нулю.

Теорема 2. *Если функция $f(x,y)$ имеет частные производные f'_x и f'_y в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и эти производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).*

Доказательство. Через O_ε обозначим ε-окрестность точки (x_0, y_0), в которой существуют производные f'_x и f'_y. Тогда, если $(x, y) \in O_\varepsilon$, то $(x_0, y) \in O_\varepsilon$ и

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = (f(x,y) - f(x_0, y)) + (f(x_0, y) - f(x_0, y_0)),$$

причем к разностям в скобках можно применить теорему Лагранжа о среднем:

$$f(x,y) - f(x_0, y) = f'_x(\xi, y)\Delta x,$$
$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)\Delta y,$$

где ξ лежит между x и x_0, а η — между y и y_0. А так как f'_x и f'_y непрерывны в точке (x_0, y_0), то

$$f'_x(\xi, y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha, \qquad f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Таким образом,

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\rho \to 0$. Теорема 2 доказана.

Все определения и утверждения этого пункта переносятся и на общий случай.

Пусть функция $z = f(\mathbf{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$, и пусть $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ и

$$\Delta z = f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0).$$

Тогда функция $f(\mathbf{x})$ называется *дифференцируемой в точке* $\mathbf{x}_0$, если существуют постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие, что

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \alpha(\mathbf{x})\|\Delta\mathbf{x}\|,$$

где $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$ при $\|\Delta\mathbf{x}\| \to 0$.

Доказывается, что в этом случае $A_i = f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$, т.е.

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + o(\|\Delta \mathbf{x}\|)$$

при $\|\Delta \mathbf{x}\| \to 0$.

Если функция $z = f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то линейная функция

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ называется *дифференциалом функции* f в точке $\mathbf{x}_0$ и обозначается dz или $df(\mathbf{x}_0)$, а переменные $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ — *дифференциалами независимых переменных* и обозначаются $dx_1, \ldots, dx_n$.

Таким образом,

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i,$$

$$\Delta z = dz + o(\|\Delta \mathbf{x}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|\Delta \mathbf{x}\| \to 0.$$

Теорема 2′. *Если функция $f(\mathbf{x})$ имеет частные производные $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ и эти производные непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$, то функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$.*

Из определения 1 следует, что дифференцируемость функции определена только во внутренних точках ее области определения.

Определение 3. Функция f называется *дифференцируемой на множестве* $G \subset D_f$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Очевидно, что в этом случае каждая точка множества G должна быть внутренней для множества D_f. Следовательно, чтобы функция f была дифференцируема на множестве $G = D_f$, необходимо, чтобы множество G было открытое.

Определение 4. Функция f, определенная на открытом множестве G, называется *непрерывно дифференцируемой* на G, если она на G имеет непрерывные частные производные.

Из теоремы 2 (соответственно, 2′) следует, что если функция непрерывно дифференцируема на некотором открытом множестве, то она и дифференцируема на этом множестве.

5.2. Дифференцирование сложной функции. Сначала рассмотрим простейший случай, когда функция имеет вид $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, где $f(x, y)$ — функция двух переменных, а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции одного переменного t.

Теорема 1. *Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, то сложная функция $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и*

$$g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0). \tag{1}$$

Доказательство. Из дифференцируемости функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в точке t_0, а функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) следует, что сложная функция $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(t_0)$ точки t_0. Кроме того, если $(x,y) \in D_f$, то

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \\ = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(x,y)\Delta x + \beta(x,y)\Delta y, \tag{2}$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Доопределим функции α и β в точке (x_0, y_0) по непрерывности, положив $\alpha(x_0,y_0) = \beta(x_0,y_0) = 0$, и подставим в равенство (2) вместо x и y значения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, $t \in O_\varepsilon(t_0)$. В результате получим равенство

$$g(t) - g(t_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta\varphi + f'_y(x_0,y_0)\Delta\psi + \\ +\alpha(\varphi(t)), \psi(t))\Delta\varphi + \beta(\varphi(t)), \psi(t))\Delta\psi,$$

где $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, $\Delta\psi = \psi(t) - \psi(t_0)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'_x(x_0,y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0,y_0)\psi'(t_0).$$

Теорема 1 доказана.

Формулу (1) коротко записывают так:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Рассмотрим пример, показывающий, что все условия теоремы 1 существенные.

Пример. Функция $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ в точке $(0,0)$ имеет частные производные $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, однако сложная функция $g(t) = f(t,t) = |t|$ в точке $t = 0$ не имеет производной. Это происходит из-за того, что функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Теперь сформулируем и докажем теорему о дифференцируемости сложной функции в общем виде.

Теорема 2. *Если функции $\varphi_i(\mathbf{t})$, $i = 1, \ldots, n$, дифференцируемы в точке $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^m$, и функция $f(x)$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0 = \varphi(\mathbf{t}_0)$, то сложная функция $g(\mathbf{t}) = f(\varphi(\mathbf{t}))$ дифференцируема в точке $\mathbf{t}_0$ и в этой точке*

$$\frac{\partial g}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}. \tag{3}$$

Доказательство. Из дифференцируемости функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$ следует, что

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} (f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) + \alpha_i(\mathbf{x}))\Delta x_i, \tag{4}$$

где $\alpha_i(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Доопределим функции $\alpha_i(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$, положив $\alpha_i(\mathbf{x}_0) = 0$, и подставим в равенство (4) $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t})$. В результате получим равенство

$$g(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t}_0) = \sum_{i=1}^{n} (f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) + \alpha_i(\varphi(\mathbf{t}))\Delta\varphi_i$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{t}) - \varphi_i(\mathbf{t}_0)$. А так как функции $\varphi_i(\mathbf{t})$ дифференцируемы в точке $\mathbf{t}_0$, то

$$\Delta\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) + \beta_{ij}(\mathbf{t}) \right) \Delta t_j,$$

где $\beta_{ij}(\mathbf{t}) \to 0$ при $\mathbf{t} \to \mathbf{t}_0$. Следовательно,

$$\Delta g = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) \Delta t_j +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \alpha_i(\varphi(\mathbf{t})) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \beta_{ij}(\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\varphi(\mathbf{t}))\beta_{ij}(\mathbf{t}) \right) \Delta t_j,$$

и поэтому функция $g(\mathbf{t})$ дифференцируема в точке $\mathbf{t}_0$,

$$dg = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) dt_j,$$

и, в частности, справедлива формула (3). Теорема 2 доказана.

Из формулы (3) следует *свойство инвариантности формы полного дифференциала*. А именно, если x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — независимые переменные, то

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \tag{5}$$

где dx_i — дифференциалы независимых переменных x_i. Если же $x_i = \varphi_i(t)$, то

$$df = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\,dt_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i, \tag{6}$$

где dx_i — дифференциалы функций $x_i = \varphi_i(t)$. Хотя в (5) и (6) dx_i имеют разный смысл, но форма дифференциала одна и та же.

5.3. Касательная плоскость к поверхности и геометрический смысл полного дифференциала. Сначала напомним определение касательной к графику функции.

Пусть кривая γ является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, и пусть $M_0 \in \gamma$. Тогда, как известно, касательная к кривой γ в точке M_0 определялась как предельное положение секущей M_0M, $M \in \gamma$, когда $M \to M_0$. Это определение равносильно следующему:

Прямая l называется касательной к кривой γ в точке $M_0 \in \gamma$, если $\rho(M;l) = o(|MM_0|)$ при $M \to M_0$, $M \in \gamma$, т.е.

$$\lim_{M\to M_0} \frac{\rho(M;l)}{|MM_0|} = 0,$$

где $\rho(M;l)$ — расстояние от точки M до прямой l.

Равносильность этих определений предлагаем доказать самостоятельно, в качестве упражнения.

По аналогии с данным выше определением касательной к графику функции $y = f(x)$ дадим определение касательной плоскости к графику функции $z = f(x,y)$.

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), и пусть S — поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$, т.е. S — график функции f, а M_0 — точка с координатами x_0, y_0 и $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Определение. Плоскость p называется *касательной плоскостью к поверхности* S в точке $M_0 \in S$, если $\rho(M;p) = o(|MM_0|)$ при $M \to M_0$, $M \in S$, т.е.

$$\lim_{M\to M_0} \frac{\rho(M;p)}{|MM_0|} = 0, \quad M \in S, \tag{1}$$

где $\rho(M;p)$ — расстояние от точки M до плоскости p.

Теорема. *График функции $z = f(x,y)$, определенной в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), имеет наклонную касательную плоскость в точке M_0 тогда и только тогда, когда функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). В этом случае касательная плоскость имеет уравнение*

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{2}$$

Доказательство. Из условия (1) следует, что касательная плоскость p к поверхности S в точке M_0 обязательно проходит через точку M_0, а так как она наклонная, то она имеет уравнение

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0), \tag{3}$$

где A и B — некоторые числа. Вычислим расстояние от точки $M \in S$ с координатами x, y и $z = f(x, y)$ до этой плоскости p:

$$\rho(M; p) = \frac{1}{N}|\Delta z - A\Delta x - B\Delta y|, \tag{4}$$

где $N = \sqrt{1 + A^2 + B^2}$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y = \gamma(x, y)\rho,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда для плоскости p, заданной уравнением (2), имеем:

$$\frac{\rho(M; p)}{|MM_0|} = \frac{|\gamma|\rho}{N\sqrt{\rho^2 + \Delta z^2}} \le \frac{|\gamma|}{N} \to 0$$

при $M \to M_0$, $M \in S$, так как $\rho \le |MM_0|$. Следовательно, эта плоскость является касательной к поверхности S в точке M_0.

Докажем теперь обратное утверждение, а именно, докажем, что если поверхность S в точке M_0 имеет касательную плоскость вида (3), то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Из условия (1) следует, что существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $M \in O_\delta(M_0) \cap S$

$$\frac{\rho(M; p)}{|MM_0|} < \frac{1}{2N}$$

или, учитывая формулу (4),

$$|\Delta z - A\Delta x - B\Delta y| \le \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Тогда

$$|\Delta z| - |A| \cdot |\Delta x| - |B| \cdot |\Delta y| \le \frac{1}{2}(\rho + |\Delta z|),$$

$$\frac{1}{2}|\Delta z| \le \rho\sqrt{A^2 + B^2} + \frac{1}{2}\rho, \quad |\Delta z| \le C\rho,$$

где $C = 1 + 2\sqrt{A^2 + B^2}$. Отсюда следует, что в окрестности точки M_0 $|MM_0| \le \sqrt{1 + C^2}\rho$, и поэтому

$$\frac{|\Delta z - A\Delta x - B\Delta y|}{\rho} = N \cdot \frac{|MM_0|}{\rho} \cdot \frac{\rho(M; p)}{|MM_0|} \to 0$$

при $\rho \to 0$. Следовательно, функция $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) дифференцируема, и в этой точке $f'_x = A$, $f'_y = B$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что график уравнения $z = f(x,y)$ в любой точке M_0 может иметь только одну наклонную касательную плоскость, заданную уравнением (2). Из уравнения (2) видно, что полный дифференциал функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику этой функции в точке M_0. В этом и состоит геометрический смысл полного дифференциала.

5.4. Частные производные высших порядков. Пусть функция $f(x,y)$, $(x,y) \in G$, имеет частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$. Эти производные называются *производными первого порядка.*

Частные производные от производных первого порядка называются *производными второго порядка* от функции f и обозначаются

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

или f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}. И вообще, частная производная от частной производной $(n-1)$-го порядка называется *частной производной n-го порядка* от рассматриваемой функции. Кроме того, будем считать, что *производная нулевого порядка* — это сама функция.

Производные f''_{xy} и f''_{yx} называются *смешанными.*

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную равенствами: $f(0,0) = 0$ и

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Для нее $f'_x(0,y) = -y$ для любого y и $f'_y(x,0) = x$ для любого x. Следовательно,

$$f''_{xy}(0,0) = -1, \quad f''_{yx}(0,0) = 1,$$

т.е. у этой функции смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} в точке $(0,0)$ существуют, но

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

Укажем достаточное условие равенства смешанных производных второго порядка.

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) имеет частные производные f''_{xy} и f''_{yx} и эти производные непрерывны в точке (x_0,y_0), то*

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x,y)$ определена в δ-окрестности $O_\delta(M_0)$ точки M_0 с координатами x_0, y_0. Тогда, если точка (x,y) принадлежит $O_\delta(M_0)$, то, очевидно, точки (x_0,y) и (x,y_0) тоже принадлежат $O_\delta(M_0)$, и, более того, в $O_\delta(M_0)$ лежит весь замкнутый прямоугольник с вершинами в этих точках.

Для $(x,y)\in O_\delta(M_0)$ рассмотрим разности

$$\Delta_x f = f(x,y)-f(x_0,y),\quad \Delta_y f = f(x,y)-f(x,y_0)$$

и разности от этих разностей

$$\Delta_y(\Delta_x f) = (f(x,y)-f(x_0,y))-(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)),$$

$$\Delta_x(\Delta_y f) = (f(x,y)-f(x,y_0))-(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)).$$

Для любой функции f, заданной в $O_\delta(M_0)$, эти разности определены и, очевидно,

$$\Delta_y(\Delta_x f) = \Delta_x(\Delta_y f).$$

Положим $\Delta_x f = \varphi(x,y)$. Тогда

$$\Delta_y(\Delta_x f) = \varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)$$

и функция $\varphi(x,y)$ при фиксированном x имеет производную по y:

$$\varphi'_y(x,y) = f'_y(x,y)-f'_y(x_0,y).$$

По теореме Лагранжа о среднем существует η_1, лежащее между y_0 и y, такое, что

$$\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0) = \varphi'_y(x,\eta_1)\Delta y,$$

где $\Delta y = y-y_0$. Аналогично,

$$\exists\xi_1:\quad f'_y(x,y)-f'_y(x_0,y) = f''_{yx}(\xi_1,y)\Delta x,$$

где $\Delta x = x-x_0$ и ξ_1 лежит между x_0 и x. Следовательно,

$$\Delta_y(\Delta_x f) = \varphi'_y(x,\eta_1)\Delta y = f''_{yx}(\xi_1,\eta_1)\Delta x\Delta y. \tag{2}$$

Положив $\Delta_y f = \psi(x,y)$, аналогично доказывается, что

$$\exists\xi_2,\eta_2:\quad \Delta_x(\Delta_y f) = \psi'_x(\xi_2,y)\Delta x = f''_{xy}(\xi_2,\eta_2)\Delta x\Delta y, \tag{3}$$

где ξ_2 лежит между x_0 и x, а η_2 — между y_0 и y.

Из (2) и (3) следует, что

$$f''_{yx}(\xi_1,\eta_1) = f''_{xy}(\xi_2,\eta_2)$$

для любой точки $(x,y)\in O_\delta(M_0)$. Отсюда в пределе при $(x,y)\to$ $\to(x_0,y_0)$ получаем равенство (1). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если функция от n переменных в окрестности некоторой точки M_0 имеет производные второго порядка и эти производные непрерывны в точке M_0, то их значения в точке M_0 не зависят от порядка дифференцирования. Далее, пусть функция f в окрестности точки M_0 имеет непрерывные частные производные второго порядка. Тогда, если f в окрестности точки M_0 имеет производные третьего порядка и эти производные непрерывны в точке M_0, то их значения в точке M_0 не зависят от порядка дифференцирования. Это утверждение по индукции обобщается на производные любого порядка.

Так как частные производные элементарных функций есть элементарные функции, то они непрерывны в своей области определения. Следовательно, для таких функций значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования. Например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Функция f, определенная на открытом множестве G, называется *m раз непрерывно дифференцируемой на G*, если она в каждой точке этого множества имеет непрерывные производные m-го порядка. Очевидно, эта функция непрерывна на G и любая ее производная порядка $k \leq m$ непрерывна на G.

5.5. Производная по направлению и градиент функции. Частные производные функции многих переменных выражают "скорость изменения" функции по направлению координатных осей; и поэтому их называют еще производными "в направлении координатных осей". Во многих прикладных задачах представляет интерес "скорость изменения" функции (т.е. ее производная) и по другим направлениям. Дадим точное определение понятию "производная функции f в точке M_0 по направлению l".

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, а направление задается единичным вектором $\boldsymbol{l}$. Тогда, как и при определении частных производных, для функции f в точке M_0 рассмотрим разность с шагом h в направлении вектора $\boldsymbol{l}$: $f(\mathbf{r}_0 + h\boldsymbol{l}) - f(\mathbf{r}_0)$, и соответствующее разностное отношение:

$$\frac{f(\mathbf{r}_0 + h\boldsymbol{l}) - f(\mathbf{r}_0)}{h} \tag{1}$$

Определение 1. Предел разностного отношения (1) при $h \to 0$ называется *производной функции f в точке M_0 по направлению l* и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(M_0)$.

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + h\boldsymbol{l}) - f(\mathbf{r}_0)}{h} \tag{2}$$

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат. Найдем формулу для вычисления производной от функции f в точке M_0 с координатами x_0, y_0, z_0 по направлению вектора l с направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке M_0, то в этой точке она имеет производную по любому направлению l, причем*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \tag{3}$$

где частные производные вычислены в точке M_0.

Доказательство. Из формулы (2) следует, что производная функции $f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) по направлению l — это производная функции

$$\varphi(h) = f(x_0 + h\cos\alpha, y_0 + h\cos\beta, z_0 + h\cos\gamma)$$

по h в точке $h = 0$. По теореме о дифференцировании сложной функции производная $\varphi'(0)$ существует и вычисляется по формуле (3). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда вектор с координатами $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ называется *градиентом функции f в точке M_0* и обозначается $\operatorname{grad} f(M_0)$.

Из формулы (3) следует, что в точке M_0 градиент функции f и производная по направлению l связаны соотношением:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, l).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f| \cos(\widehat{\operatorname{grad} f, l}),$$

где $(\widehat{\operatorname{grad} f, l})$ — угол между векторами $\operatorname{grad} f$ и l, и поэтому

$$\max_l \frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = |\operatorname{grad} f(M_0)|,$$

где максимум берется по всевозможным направлениям l.

Очевидно, если $\operatorname{grad} f(M_0) \neq 0$, то этот максимум достигается лишь тогда, когда $\cos(\widehat{\operatorname{grad} f, l}) = 1$, т. е. когда l имеет направление $\operatorname{grad} f$.

Таким образом, *градиент функции f в точке M_0 — это вектор, который указывает направление наибольшего возрастания функции f в точке M_0 и длина которого равна производной функции f в точке M_0 по этому направлению.* Отсюда следует, что градиент функции f в каждой точке определяется только самой функцией и не зависит от выбора системы координат.

Для обозначения градиента часто используют символический вектор

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

называемый *оператором Гамильтона* или *оператором набла*. Тогда

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = (\nabla f, \mathbf{l}).$$

В заключение отметим еще одно свойство градиента.

Если дифференцируемая функция f постоянна на дифференцируемой кривой Γ, то градиент функции f в точках кривой Γ ортогонален этой кривой.

Действительно, если кривая Γ задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \Delta$, то

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \text{const} \quad \forall t \in \Delta$$

и, следовательно,

$$f'_x x' + f'_y y' + f'_z z' = 0 \quad \forall t \in \Delta,$$

т.е. $(\nabla f, \mathbf{r}') = 0$ в любой точке кривой Γ.

5.6. Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка на открытом множестве G. Очевидно, эта функция дифференцируема на G и ее первые производные тоже дифференцируемы на G.

Рассмотрим дифференциал

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, dx_i$$

как функцию от $\mathbf{x}$, считая $dx_i = \Delta x_i$, постоянными, и возьмем дифференциал от этой функции:

$$\delta(df(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_j\right) dx_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \delta x_j.$$

(Здесь дифференциал от $df(\mathbf{x})$ для отличия обозначен не буквой d, а буквой δ.)

Значение дифференциала от первого дифференциала функции $f(\mathbf{x})$ при $\delta x_j = dx_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, называется *вторым дифференциалом функции* f и обозначается $d^2 f$. Таким образом,

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j.$$

Для функции $z = f(x, y)$ эта формула имеет вид

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Дифференциал k-го порядка определяется по индукции. Пусть функция f имеет непрерывные частные производные k-го порядка на множестве G. Чтобы получить дифференциал $d^k f$, надо взять дифференциал от дифференциала $d^{k-1} f$:

$$\delta(d^{k-1} f(\mathbf{x})) = \delta\left(\sum_{i_1, \ldots, i_{k-1}=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k-1}}} dx_{i_1} \ldots dx_{i_{k-1}}\right),$$

и положить $\delta x_i = dx_i$. В результате получим:

$$d^k f = \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} dx_{i_k}.$$

Для функции $z = f(x, y)$ эта формула имеет вид

$$d^k f = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j} dx^{k-j} dy^j.$$

Она доказывается индукцией по k. Предлагается доказать ее самостоятельно в качестве упражнения.

5.7. Формула Тейлора. Для написания формулы Тейлора в случае функций многих переменных удобно воспользоваться дифференциальным оператором

$$(\nabla, \Delta x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n, \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$(\nabla, \Delta x) f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n,$$

где частные производные вычислены в точке x^0.

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена и m раз непрерывно дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x^0, то для любого $x \in O_\delta(x^0)$ существует $\theta \in (0;1)$ такое, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(\nabla, \Delta x)^k f(x^0) + \frac{1}{m!}(\nabla, \Delta x)^m f(x^0 + \theta\Delta x), \qquad (2)$$

где $(\nabla, \Delta x)^k$ — k-я степень оператора (1).

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in O_\delta(x^0)$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x)$. Эта функция m раз непрерывно дифференцируема на некотором интервале, содержащем отрезок $[-1;1]$. Следовательно, существует $\theta \in (0;1)$ такое, что

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta).$$

А так как $\varphi(0) = f(x^0)$,

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\Delta x_i = (\nabla, \Delta x) f(x^0),$$

$$\varphi^{(k)}(0) = (\nabla, \Delta x)^k f(x^0), \quad \varphi^{(m)}(\theta) = (\nabla, \Delta x)^m f(x^0 + \theta\Delta x),$$

то теорема доказана.

Формула (2) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x^0, то для любого $x \in O_\delta(x^0)$ существует $\theta \in (0;1)$ такое, что*

$$f(x) - f(x^0) = (\nabla f(x^0 + \theta\Delta x), \Delta x). \qquad (3)$$

Формула (3) называется *формулой конечных приращений.*

Следствие 2. *Если функция $f(x,y)$ двух переменных x и y определена и n раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то для любой точки $(x,y) \in O_\delta(x_0, y_0)$ существует $\theta \in (0;1)$ такое, что*

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} \frac{D_x^j D_y^{k-j} f(x_0, y_0)}{j!(k-j)!}(x - x_0)^j (y - y_0)^{k-j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \frac{(x - x_0)^j (y - y_0)^{n-j}}{j!(n-j)!} D_x^j D_y^{n-j} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \qquad (4)$$

где D_x и D_y — операторы дифференцирования по x и y.

Доказательство. В случае двух переменных x и y дифференциальный оператор (1) имеет вид $D_x\Delta x + D_y\Delta y$. Тогда по формуле бинома Ньютона

$$(D_x\Delta x + D_y\Delta y)^k f(x_0, y_0) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} D_x^j D_y^{k-j} f(x_0, y_0)\Delta x^j \Delta y^{k-j},$$

и поэтому формула (4) есть частный случай формулы (2).

Чтобы общую формулу (2) расписать через производные, введем некоторые новые обозначения, но прежде докажем одно обобщение формулы бинома Ньютона.

Лемма. *Для любого натурального k и любых чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедлива формула*

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}, \tag{5}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — точка с целыми неотрицательными координатами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, и суммирование идет по всем α, у которых $|\alpha| = k$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ формула (5) очевидна, а при $n = 2$ она совпадает с формулой бинома Ньютона. Далее, для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо утверждение: если формула (5) верна для $n = m$, то она верна и для $n = m + 1$. Действительно, по формуле бинома Ньютона

$$(a_1 + \ldots + a_m + a_{m+1})^\beta = \sum_{\beta+\alpha_{m+1}=k} \frac{k!}{\beta!\alpha_{m+1}!} (a_1 + \ldots + a_m)^\beta a_{m+1}^{\alpha_{m+1}},$$

где суммирование идет по всем целым неотрицательным β и α_{m+1}, для которых $\beta + \alpha_{m+1} = k$. Отсюда и из нашего предположения

$$(a_1 + \ldots + a_m)^\beta = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=\beta} \frac{\beta!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}$$

получаем равенство (5) при $n = m + 1$.

Следовательно, формула (5) справедлива для любого натурального n. Лемма доказана.

Точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными координатами в формуле (5) называется *мультииндексом*. Для этого мультииндекса и произвольной точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ введем обозначения:

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \quad a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Тогда формулу (5) можно записать короче:

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a^\alpha. \tag{6}$$

Используя мультииндексные обозначения и формулу (6), формулу Тейлора (2) можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x^0)(x-x^0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x^0+\theta\Delta x)(x-x^0)^\alpha, \tag{7}$$

где $f^{(\alpha)} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} f$.

Следствие 3. *Если функция $f(x)$ определена и m раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x^0, то*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x^0)(x-x^0)^\alpha + o(\rho^m), \tag{8}$$

при $\rho \to 0$, где $\rho = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2}$.

Действительно, так как производные m-го порядка функции $f(x)$ непрерывны в точке x^0 и, очевидно, $|(x-x^0)^\alpha| \le \rho^{|\alpha|}$, то

$$f^{(\alpha)}(x^0+\theta\Delta x)(x-x^0)^\alpha = f^{(\alpha)}(x^0)(x-x^0)^\alpha + o(\rho^{|\alpha|})$$

при $\rho \to 0$, и поэтому из формулы (7) следует формула (8).

Формула (8), как и раньше, называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

§ 6. Некоторые понятия анализа в области комплексных чисел

6.1. Комплексные числа. Как известно, квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом не имеет решений в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. Например, уравнению $x^2 + 1 = 0$ не удовлетворяет ни одно $x \in \mathbb{R}$. Возникает необходимость в расширении понятия числа так, чтобы любое квадратное уравнение имело хотя бы одно решение.

Рассмотрим множество всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$ действительных чисел x и y, и в этом множестве введем понятие равенства и операции сложения и умножения.

Два элемента (две пары) $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$, у которых $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, называются *равными*. В этом случае будем писать $z_1 = z_2$.

Для любых $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ *сумма* $z_1 + z_2$ и *произведение* $z_1 z_2$ определяются равенствами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел, в котором по указанным выше правилам введены понятия равенства и операции сложения и умножения, называется *множеством комплексных чисел* и обозначается $\mathbf{C}$. Элементы множества $\mathbf{C}$ называются *комплексными числами*.

Каждое комплексное число $(x; 0)$ отождествляют с действительным числом x и пишут $(x; 0) = x$. Тогда из формул (1) и (2) следует, что если $z_1 = (x_1, 0)$ и $z_2 = (x_2, 0)$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; 0) = x_1 + x_2,$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2; 0) = x_1 x_2.$$

Эти равенства показывают, что операции над комплексными числами вида $(x; 0)$ совпадают с операциями над действительными числами. В этом смысле множество $\mathbf{C}$ комплексных чисел является расширением множества $\mathbf{R}$ действительных чисел.

Среди комплексных чисел особую роль играет число $i = (0; 1)$, которое называется *мнимой единицей*. Легко видеть, что $i \cdot i = (-1; 0) = -1$, т.е. $i^2 = -1$, и, следовательно, комплексное число $z = i$ удовлетворяет уравнению $z^2 + 1 = 0$.

Согласно введенным определениям сложения и умножения комплексных чисел имеем:

$$(0; y) = (0; 1)(y; 0) = iy,$$
$$(x; y) = (x; 0) + (0; y) = x + iy.$$

Следовательно, любое комплексное число $z = (x; y)$ имеет представление

$$z = x + iy.$$

Это представление числа z называется *алгебраической формой комплексного числа* z.

Если $z = x + iy$, то число x называется *действительной частью числа* z и обозначается $\operatorname{Re} z$, число y — *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} z$, а неотрицательное число $\sqrt{x^2 + y^2}$ — *модулем числа* z и обозначается $|z|$. Если $x = 0$, т.е. $z = iy$, то это число называется *чисто мнимым*.

Очевидно, $z = 0$ тогда и только тогда, когда $|z| = 0$. Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$. Легко видеть, что $|z| = |\bar{z}|$ и $z\bar{z} = |z|^2$.

Легко проверить, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами *коммутативности, ассоциативности* и *дистрибутивности*. Поэтому сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам сложения и умножения многочленов, заменяя i^2 на -1.

Например, если $z = x + iy$, то

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - x\cdot iy + iy\cdot x - iy\cdot iy = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

На множестве $\mathbb{C}$ обычным образом определяются операции вычитания и деления.

Для любого числа z число, сумма которого с числом z равна 0, называется *противоположным числу* z и обозначается $-z$. Очевидно, если $z = x + iy$, то $-z = -x - iy$.

Разность $z_1 - z_2$, как обычно, определяется равенством:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Следовательно, если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Число, произведение которого с числом z равно 1, называется *обратным числу* z и обозначается $1/z$ или z^{-1}.

Очевидно, у числа $z = 0$ нет обратного. Если же $z \neq 0$, то уравнение $z^{-1}\cdot z = 1$ равносильно уравнению $z^{-1}\cdot|z|^2 = \overline{z}$, и поэтому

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Следовательно, если $z = x + iy$, то

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Частное от деления числа z_1 на число $z_2 \neq 0$ обозначается $z_1 : z_2$ или z_1/z_2 и определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Легко доказывается, что операция комплексного сопряжения перестановочна с арифметическими операциями, т.е.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

(Предлагается доказать эти равенства в качестве упражнения.)

Отсюда следует, что если $P(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами, то

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z}).$$

В частности, если z_0 — корень этого многочлена, то и $\overline{z_0}$ — тоже его корень.

6.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Комплексное число $z = x + iy$ изображается на координатной плоскости точкой с координатами (x, y). Это соответствие между множеством $\mathbb{C}$ комплексных чисел и точками плоскости является взаимно однозначным, поэтому часто комплексные числа называют точками плоскости.

Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Комплексное число $z = x + iy$ изображают еще вектором с началом в точке 0 и концом в точке z. Тогда число $z_1 + z_2$ изображается вектором, равным сумме векторов z_1 и z_2, а разность $z_1 - z_2$ — вектором, равным разности векторов. Очевидно, $|z|$ — это длина вектора, и

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Если r и φ — полярные координаты точки $z = x + iy$, то, как известно,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

и поэтому

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Угол φ называется *аргументом комплексного числа* $z \neq 0$ и обозначается $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Очевидно, если φ_0 — аргумент числа z_0, то и любое $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где k — целое, — тоже аргумент числа z_0.

Запись комплексного числа $z \neq 0$ в виде (1) называется *тригонометрической формой комплексного числа*. Она удобна при нахождении произведения и частного комплексных чисел. А именно, если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{3}$$

Следовательно, модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Аналогично, модуль частного равен частному модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

В частности, если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi), \tag{4}$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Последнее равенство называется *формулой Муавра*. Из нее следует, что для любого заданного комплексного числа $a \neq 0$ уравнение $z^n = a$ имеет n различных решений. Действительно, если

$$a = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) \tag{6}$$

при любом целом k являются решениями уравнения $z^n = a$. Очевидно, других решений это уравнение не имеет.

Из формулы (6) видно, что среди z_k только n различных чисел: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, так как, например, $z_n = z_0$, $z_{-1} = z_{n-1}$ и т.д. На комплексной плоскости точки $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке 0.

Комплексное число $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ обычно обозначают символом $e^{i\varphi}$, т.е. по определению полагают

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Тогда формула (1) принимает вид $z = re^{i\varphi}$. Запись комплексного числа в таком виде называется *показательной формой комплексного числа*, а формула (7) — *формулой Эйлера*.

Из формул (2) и (3) следует, что если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

В частности,

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad (e^{i\varphi})^{-1} = e^{-i\varphi}.$$

И, следовательно, $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ для любого целого n. Эти свойства похожи на свойства функции e^x, где $x \in \mathbb{R}$.

6.3. Комплекснозначные функции действительного аргумента. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — последовательность комплексных чисел. Ее можно рассматривать как последовательность точек или векторов на плоскости.

На последовательности комплексных чисел естественным образом переносятся многие определения и теоремы из теории действительных чисел. Для примера приведем определение предела последовательности.

Число z называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

В качестве упражнения предлагается сформулировать и доказать теоремы о единственности предела, об ограниченности сходящейся последовательности, о пределе суммы, разности, произведения и частного.

Комплекснозначной функцией действительного переменного называется функция, которая определена на некотором множестве действительных чисел и принимает значения в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Эти функции можно рассматривать как векторные функции на плоскости. Для них обычным образом формулируются определения предела, непрерывности и производной.

Производная функции $z(t)$ определяется равенством

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

Очевидно, производная у функции $z(t) = x(t) + iy(t)$ существует тогда и только тогда, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные, и в этом случае

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Легко проверить, что если функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ дифференцируемы в некоторой точке, то функции $z_1(t) \pm z_2(t)$ и $z_1(t)z_2(t)$ в этой точке тоже дифференцируемы и

$$(z_1 \pm z_2)' = z_1' \pm z_2', \quad (z_1 z_2)' = z_1' z_2 + z_1 z_2'.$$

Если, кроме того, $z_2(t) \neq 0$, то

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)' = \frac{z_1' z_2 - z_1 z_2'}{z_2^2}.$$

Следует заметить, что не все свойства дифференцируемых действительных функций переносятся на комплекснозначные функции. Например, для них, как и для векторных функций, теоремы Ролля и Лагранжа являются неверными.

6.4. Функции комплексного переменного. *Функцией комплексного переменного* называется функция, которая определена на некотором множестве комплексных чисел и принимает значения в множестве комплексных чисел.

Любую функцию $w = f(z)$, где $z = x + iy$ и $w = u + iv$, можно представить в виде суммы:

$$f(z) = u(x;y) + iv(x;y),$$

где $u(x;y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, и рассматривать эту функцию как пару действительных функций от двух действительных переменных или как отображение, которое точке (x,y) ставит в соответствие точку (u,v). Поэтому многие понятия и свойства таких отображений естественным образом переносятся на функции комплексного переменного.

Например, число A называется *пределом функции* $f(z)$ *при* $z \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in \mathring{O}_\delta(a) \cap D_f \quad f(z) \in O_\varepsilon(A).$$

Здесь, как обычно, a — предельная точка множества D_f (области определения функции f).

Аналогично функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in D_f$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in O_\delta(z_0) \cap D_f \quad f(z) \in O_\varepsilon(w_0),$$

где $w_0 = f(z_0)$.

Очевидно, сумма, разность и произведение непрерывных функций являются непрерывными функциями, а отношение непрерывно во всех точках, где знаменатель отличен от нуля. Справедлива и теорема о непрерывности композиции непрерывных функций.

Легко показать, что функции z, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$ и любой многочлен

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

являются непрерывными на всей комплексной плоскости, а рациональная функция

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены, непрерывна в любой точке z, где $Q(z) \neq 0$.

Рассмотрим некоторые другие элементарные функции комплексного переменного.

Пример 1. Для любого $z = x + iy$ *показательная функция* e^z определяется формулой

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy}.$$

Из этого определения следует, что функция e^z непрерывна на всей комплексной плоскости. Очевидно,

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y, \quad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Кроме того,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

для любых комплексных z_1 и z_2.

Пример 2. Для любого комплексного z *тригонометрические функции* $\cos z$ и $\sin z$ определяются формулами

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Из этого определения следует, что функции $\cos z$ и $\sin z$ непрерывны на всей комплексной плоскости, и для них справедливы формулы

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

в частности,

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Как обычно, функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Пример Гиперболические функции $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ определяются формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Очевидно,

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i\sin(iz).$$

6.5. Основная теорема алгебры. Комплексное число z_0 называется *корнем* (или *нулем*) *многочлена*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

если $P(z_0) = 0$. Если $a_n \neq 0$, то n называется *степенью многочлена*.

Известно, что число z_0 является корнем многочлена $P(z)$ тогда и только тогда, когда $P(z)$ делится без остатка на $z - z_0$ (теорема Безу).

Если многочлен $P(z)$ делится на $(z-z_0)^k$ и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$, то число k называется *кратностью корня* z_0.

В этом пункте мы докажем так называемую *основную теорему алгебры*, которая часто используется и в алгебре, и в анализе.

Теорема. *В множестве комплексных чисел любой многочлен степени* $n \geq 1$ *имеет хотя бы один нуль.*

Доказательство. Рассмотрим нули многочлена

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_n = 1$. Заметим еще, что для $n = 1$ и $n = 2$ утверждение теоремы очевидное, поэтому будем считать, что $n \geq 3$.

Легко доказывается, что для любого многочлена $P(z)$ неотрицательная функция $f(x,y) = |P(z)|$ двух действительных переменных x и y, где $z = x + iy$, наименьшее значение принимает в некоторой конечной точке (x_0, y_0). Действительно, так как $f(x,y) \to +\infty$ при $|z| \to \infty$, то существует $R > 0$ такое, что

$$f(x,y) > f(0,0) \quad \forall (x,y), \quad x^2 + y^2 > R^2. \tag{1}$$

В замкнутом круге $x^2+y^2 \leq \mathbb{R}^2$ функция $f(x,y)$ непрерывна, поэтому среди ее значений есть наименьшее, т.е. в этом круге существует точка (x_0, y_0) такая, что

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y), \quad x^2 + y^2 \leq R^2. \tag{2}$$

Теперь из (1) и (2) следует, что

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, для любого многочлена $P(z)$ имеет место следующее утверждение: существует $z_0 \in \mathbf{C}$ такое, что

$$|P(z_0)| = \min_{z \in \mathbf{C}} |P(z)|. \tag{3}$$

Многочлен $P(z)$ запишем в виде суммы по степеням $z - z_0$:

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n. \tag{4}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что $b_0 = 0$, так как $P(z_0) = b_0$.

Предположим, что $b_0 \neq 0$. Пусть сначала $b_1 \neq 0$. Положим $z_1 = -b_0/b_1$ и рассмотрим функцию

$$P(z_0 + tz_1) = b_0(1-t) + t^2 z_1^2 Q(tz_1), \quad t \in [0;1],$$

где Q — многочлен степени $n-2$. Положим

$$M = \max_{t\in[0;1]} |Q(tz_1)|.$$

Тогда

$$|P(z_0+tz_1)| \leq |b_0|(1-t) + t^2 M|z_1|^2 = |b_0| - t(|b_0| - tM|z_1|^2).$$

Отсюда следует, что если

$$0 < t < \frac{|b_0|}{M|z_1|^2},$$

то

$$|P(z_0+tz_1)| < |b_0| = |P(z_o)|,$$

что противоречит условию (3).

Пусть теперь $b_1 = b_2 = \ldots = b_{j-1} = 0$, но $b_j \neq 0$. Тогда разложение (4) имеет вид

$$P(z) = b_0 + b_j(z-z_0)^j + \ldots + b_n(z-z_0)^n.$$

Через z_1 обозначим один из корней j-й степени из числа $-b_0/b_j$ и рассмотрим функцию

$$P(z_0+tz_1) = b_0(1-t^j) + t^{j+1}z_1^{j+1}Q(tz_1),$$

где Q — многочлен степени $n-j-1$. Отсюда следует, что

$$|P(z_0+tz_1)| \leq |b_0| - t^j(|b_0| - tM|z_1|^{j+1})$$

для любого $t \in [0;1]$, а это противоречит условию (3). Следовательно, предположение $b_0 \neq 0$ неверное. Теорема доказана.

Следствие. *Любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет точно n нулей, если каждый нуль считать столько раз, какова его кратность.*

6.6. Дифференцируемые функции. Для функции комплексного переменного *производная* определяется так же, как и для функции действительного переменного:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \tag{1}$$

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если она определена в некоторой окрестности точки z_0 и в этой точке имеет конечную производную.

Пример 1. Постоянная функция $f(z) = c$ дифференцируема и $(c)' = 0$.

Пример 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ степенная функция $f(z) = z^n$ дифференцируема на всей комплексной плоскости и, очевидно,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Для функций комплексного переменного справедливы известные правила дифференцирования, т.е. теоремы о производной суммы, разности, произведения, частного и теорема о производной сложной функции.

Из правил дифференцирования следует, что многочлен есть дифференцируемая функция на всей комплексной плоскости, а рациональная функция дифференцируема во всех точках, где знаменатель отличен от нуля.

Заметим, что в равенстве (1), которое определяет производную, предел не зависит от способа стремления z к z_0. В частности, этот предел один и тот же при $z \to z_0$ по любому лучу, выходящему из точки z_0. Это накладывает на дифференцируемые функции комплексного переменного дополнительные условия.

Действительно, пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Вычислим предел (1) при $z \to z_0$, когда $y = y_0$. В этом случае

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2}$$

Если же $x = x_0$, то

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Из этих равенств следует, что если функция $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ имеет производную, то в точке (x_0, y_0) справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Они называются *условиями Коши–Римана.*

Теорема. *Для того чтобы функция $f(z)$, где $z = x + iy$, была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции*

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

в точке (x_0, y_0) были дифференцируемы и удовлетворяли условиям Коши–Римана.

Доказательство. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0, т.е. она определена в некоторой окрестности точки z_0 и имеет производную $f'(z_0)$. Тогда

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \gamma(z)\rho, \tag{3}$$

где $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$, $\rho = |\Delta z|$ и $\gamma(z) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Положим $f'(z_0) = A + iB$, $\gamma = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$. В этих обозначениях формула (3) принимает вид

$$\Delta w = (A+iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)\rho, \tag{4}$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\rho \to 0$. Отсюда следует, что

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha\rho, \tag{5}$$

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \beta\rho, \tag{6}$$

где $\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0)$, $\Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0)$. Таким образом, в точке (x_0,y_0) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = B = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

т.е. выполняются условия Коши–Римана.

Пусть теперь функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0) дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши–Римана. Положим

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда выполняются равенства (5) и (6), где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\rho \to 0$. Второе равенство умножим на i и сложим его с первым. В результате получим формулу (4), т.е.

$$\Delta w = (A+iB)\Delta z + \gamma\rho,$$

где $\gamma = \alpha + i\beta \to 0$ при $\rho \to 0$. Следовательно, функция $w = f(z)$ в точке z_0 дифференцируема и $f'(z_0) = A + iB$. Теорема доказана.

П р и м е р 3. Функция $w = \bar z$ не дифференцируема ни в одной точке.

Действительно, у нее $u = x$, $v = -y$, $u'_x = 1$, $v'_y = -1$, и, следовательно, для нее не выполняются условия Коши–Римана.

П р и м е р 4. Исследуем на дифференцируемость функции e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$.

Функция

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

дифференцируема в любой точке $z = x + iy$, так как функции $u = e^x \cos y$ и $v = e^x \sin y$ в любой точке (x,y) дифференцируемы и, как легко показать, удовлетворяют условиям Коши–Римана. По формуле (2) находим

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^z, \quad \text{т.е.} \quad (e^z)' = e^z.$$

Отсюда и из правил дифференцирования следует, что функции $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ дифференцируемы в любой точке z и

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$$
$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

§ 7. Мера множеств точек на плоскости и в пространстве

7.1. Мера элементарных множеств. Определение меры Жордана. Сначала определим меру для так называемых *клеточных* (или *элементарных*) *множеств*.

Определение 1. Любое множество вида

$$\Delta = (a_1; b_1] \times \ldots \times (a_n; b_n],$$

где $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ $\forall i$, называется *n-мерной клеткой*. Любое множество, являющееся объединением конечного числа попарно не пересекающихся n-мерных клеток, называется *клеточным* или *элементарным*. Пустое множество тоже считается элементарным.

Легко видеть, что объединение, пересечение и разность любых двух элементарных множеств являются элементарными множествами, т.е. элементарные множества образуют *алгебру множеств*. (Доказать это утверждение в качестве упражнения.)

Определение 2. Для любой n-мерной клетки

$$\Delta = (a_1; b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$$

число $(b_1 - a_1)\ldots(b_n - a_n)$ называется *мерой клетки* Δ и обозначается $m\Delta$. Если множество S является объединением попарно не пересекающихся клеток $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$, то *мерой множества* S называется число

$$mS = \sum_{j=1}^{N} m\Delta_j.$$

Мера пустого множества считается равной нулю.

Лемма 1. *Для любых двух элементарных множеств* s *и* S *справедливо равенство*

$$m(s \cup S) + m(s \cap S) = ms + mS.$$

Если же s и S не пересекаются, то

$$m(s \cup S) = ms + mS.$$

Лемма 2. *Если множества* s *и* S *элементарные и* $s \subset S$, *то*

$$m(S \setminus s) = mS - ms.$$

Доказать эти утверждения в качестве упражнения.

Определение 3. Для любого ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}^n$ число

$$\underline{m}G = \sup_{s \subset G} ms,$$

где sup берется по всем элементарным множествам $s \subset G$, называется *нижней* (или *внутренней*) *мерой Жордана*, а число

$$\overline{m}G = \inf_{S \supset G} mS,$$

где inf берется по всем элементарным множествам $S \supset G$, называется *верхней* (или *внешней*) *мерой Жордана множества* G.

У любого ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}^n$ существуют верхняя и нижняя меры Жордана, причем, очевидно,

$$0 \le \underline{m}G \le \overline{m}G < +\infty.$$

Так же очевидно, что если $g \subset G$, то

$$\underline{m}g \le \underline{m}G, \quad \overline{m}g \le \overline{m}G,$$

т.е. верхняя и нижняя меры Жордана обладают свойством монотонности.

Определение 4. Ограниченное множество G точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если его верхняя мера равна нижней мере, т.е. если $\underline{m}G = \overline{m}G$. Общее значение этих мер называется *мерой Жордана множества* G и обозначается mG.

Таким образом, если множество G измеримо, то

$$mG = \overline{m}G = \underline{m}G.$$

Очевидно, любое элементарное множество измеримо по Жордану, и его мера Жордана равна его мере как клеточного множества.

Пример 1. Замыкание $\overline{\Delta}$ любой n-мерной клетки Δ измеримо по Жордану и $m\overline{\Delta} = m\Delta$.

Действительно, пусть $\Delta = (a_1; b_1] \times \ldots \times (a_n; b_n]$, тогда $\overline{\Delta} = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$. Рассмотрим n-мерные клетки

$$\Delta_k = \left(a_1 - \frac{1}{k}; b_1\right] \times \ldots \times \left(a_n - \frac{1}{k}; b_n\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно,

$$\Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Delta_k, \quad m\Delta \le \underline{m}\overline{\Delta} \le \overline{m}\overline{\Delta} \le m\Delta_k \quad \forall k, \quad \lim_{k \to +\infty} m\Delta_k = m\Delta.$$

Отсюда следует, что множество $\overline{\Delta}$ измеримо по Жордану и $m\overline{\Delta} = m\Delta$.

Пример 2. Множество Δ^* всех внутренних точек n-мерной клетки Δ измеримо по Жордану и $m\Delta^* = mA$.

Действительно, пусть $A = (a_1; b_1] \times \ldots \times (a_n; b_n]$, тогда $\Delta^* = (a_1; b_1) \times \ldots \times (a_n; b_n)$. Рассмотрим n-мерные клетки

$$\Delta_k = \left(a_1; b_1 - \frac{1}{k}\right] \times \ldots \times \left(a_n; b_n - \frac{1}{k}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $\Delta_k \subset \Delta^* \subset \Delta$,

$$m\Delta_k \leq \underline{m}\Delta^* \leq \overline{m}\Delta^* \leq m\Delta \quad \forall k, \lim_{k\to\infty} m\Delta_k = m\Delta.$$

Отсюда следует, что множество Δ^* измеримо по Жордану и $m\Delta^* = m\Delta$.

Пример 3. Замыкание $\overline{S}$ и множество S^* всех внутренних точек любого элементарного множества S измеримы по Жордану и

$$mS^* = mS = m\overline{S}.$$

Пример 4. Множество, состоящее из конечного числа точек, измеримо по Жордану и его мера равна нулю.

Доказать эти утверждения в качестве упражнения.

7.2. Свойства измеримых по Жордану множеств. Критерии измеримости ограниченных множеств. Как и в § 7 гл. 1, доказывается, что объединение, пересечение и разность любых двух измеримых по Жордану множеств являются измеримыми по Жордану.

Теорема 1. *Если множества G_1 и G_2 измеримы, то множества $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$ тоже измеримы и*

$$m(G_1 \cup G_2) + m(G_1 \cap G_2) = mG_1 + mG_2.$$

Следствие. *Если измеримые множества G_1 и G_2 не пересекаются, то*

$$m(G_1 \cup G_2) = mG_1 + mG_2.$$

Теорема 2. *Если множества g и G измеримы и $g \subset G$, то множество $G \setminus g$ тоже измеримо и*

$$m(G \setminus g) = mG - mg.$$

Доказательства этих теорем для множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$ в случае произвольного n ничем не отличаются от доказательств соответствующих теорем в случае $n = 1$, которые были даны в § 7 гл. 1. Так же, как и в случае $n = 1$, доказывается следующий *критерий измеримости ограниченных множеств.*

Теорема 3. *Для того чтобы ограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы его граница ∂G была измерима и $m\,\partial G = 0$.*

В заключение докажем еще один критерий измеримости, которым удобно пользоваться при рассмотрении конкретных примеров.

Теорема 4. *Для того чтобы множество $G \subset \mathbb{R}^n$ было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы существовали две последовательности $\{g_k\}$ и $\{G_k\}$ измеримых множеств таких, что*

$$g_k \subset G \subset G_k \quad \forall k \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} m(G_k \setminus g_k) = 0. \tag{1}$$

В этом случае

$$mG = \lim_{k\to\infty} mg_k = \lim_{k\to\infty} mG_k. \tag{2}$$

Доказательство. Если множество G измеримо, то из определения верхней и нижней мер Жордана (как точных граней соответствующих числовых множеств) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют элементарные множества s_k и S_k такие, что $s_k \subset G \subset S_k$ и

$$ms_k \le mG \le ms_k + \frac{1}{k}, \quad mS_k - \frac{1}{k} \le mG \le mS_k.$$

Последовательности элементарных множеств s_k и S_k, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям (1) и (2).

Если же существуют последовательности $\{g_k\}$ и $\{G_k\}$ измеримых множеств, которые удовлетворяют условиям (1), то

$$mg_k \le \underline{m}G \le \overline{m}G \le mG_k \quad \forall k,$$

$$0 \le \overline{m}G - \underline{m}G \le mG_k - mg_k = m(G_k \setminus g_k).$$

А так как $m(G_k \setminus g_k) \to 0$ при $k \to \infty$, то отсюда следует, что $\overline{m}G = \underline{m}G$, т.е. множество G измеримо,

$$mg_k \le mG \le mG_k \quad \forall k,$$

и справедливы неравенства

$$0 \le mG_k - mG \le m(G_k \setminus g_k) \quad \forall k,$$

$$0 \le mG - mg_k \le m(G_k \setminus g_k) \quad \forall k,$$

из которых следуют равенства (2). Теорема 4 доказана.

7.3. Примеры измеримых и неизмеримых множеств. Напомним, что для любой функции f множество всевозможных пар $\{M; f(M)\}$, где $M \in D_f$, называется графиком функции f и обозначается Γ_f. Очевидно, если $D_f \subset \mathbb{R}^{n-1}$, то $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Если функция f определена и равномерно непрерывна на ограниченном множестве D_f, то множество Γ_f измеримо и $m\Gamma_f = 0$.*

Доказательство. Так как функция f равномерно непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любых точек M и M', принадлежащих D_f и удовлетворяющих условию $|MM'| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon.$$

Множество D_f ограничено, поэтому существует $(n-1)$-мерная клетка Δ, содержащая D_f. Разобьем Δ на попарно непересекающиеся клетки, у которых длина любой диагонали меньше δ_ε, и через $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ обозначим те из них, которые пересекаются с D_f. В каждом множестве $\Delta_j \cap D_f$ выберем некоторую точку M_j и положим $y_j = f(M_j)$. Тогда, очевидно, график сужения функции f на множество $\Delta_j \cap D_f$ содержится в n-мерной клетке $\tilde{\Delta}_j = \Delta_j \times (y_j - \varepsilon; y_j + \varepsilon]$. Следовательно, $\Gamma_f \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} \tilde{\Delta}_j$

$$\overline{m}\Gamma_f \leq \sum_{j=1}^{N} 2\varepsilon m\Delta_j = 2\varepsilon m\Delta.$$

А так как ε может быть любым положительным числом, то $\overline{m}\Gamma_f = 0$, и поэтому множество Γ_f измеримо по Жордану и $m\Gamma_f = 0$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *График любой функции, определенной и непрерывной на компакте, имеет меру ноль.*

Заметим, что ограниченность множества, на котором задана функция f, является необходимым условием измеримости по Жордану множества Γ_f. Однако непрерывность функции f не является необходимым условием для этого. Например, функция Дирихле, определенная на отрезке $[0;1]$, разрывна в любой точке области определения, но ее график является измеримым по Жордану множеством на плоскости, и его мера равна нулю.

Лемма 2. *Если множество $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ измеримо, то для любого $h \geq 0$ и любого a множество $G = B \times [a; a+h] \subset \mathbb{R}^n$ тоже измеримо и $mG = h \cdot mB$.*

Доказательство. Так как множество B измеримо, то существует две последовательности $\{s_k\}$ и $\{S_k\}$ элементарных множеств таких, что

$$s_k \subset B \subset S_k \quad \forall k \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} ms_k = \lim_{k\to\infty} mS_k = mB.$$

Из примеров, рассмотренных в п.6.1, следует, что множества $g_k = s_k \times [a; a+h]$ и $G_k = S_k \times [a; a+h]$ измеримы, $mg_k = hms_k$, $mG_k = hmS_k$, и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} mg_k = \lim_{k\to\infty} mG_k = h \cdot mB.$$

А так как $g_k \subset G \subset G_k$ $\forall k$, то множество G измеримо и $mG = h \cdot mB$. Лемма 2 доказана.

Как обычно, множество $G = B \times [a; a+h]$ будем называть *прямым цилиндром с основанием* B *и высотой* h.

Следствие 2. *Прямой цилиндр конечной высоты с основанием меры ноль имеет меру ноль.*

Из следствий 1 и 2 и критерия измеримости ограниченных множеств получаем следующее утверждение, которое описывает достаточно широкий класс измеримых множеств.

Пусть G — ограниченное множество G точек n-мерного пространства, граница которого ∂G есть объединение конечного числа множеств, каждое из которых является частью графика функции, непрерывной на компакте, или частью цилиндра с основанием меры ноль. Любое такое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

В конце рассмотрим примеры неизмеримых множеств.

Пример 1. Пусть Q — множество всех рациональных точек отрезка $[0;1]$. Тогда множество $G = Q \times Q$ не будет измеримым по Жордану. Действительно, $\partial G = \overline{\Delta}$, где $\overline{\Delta}q = [0;1] \times [0;1]$, поэтому $m\partial G = 1$. Следовательно, множество G не имеет меры Жордана.

Пример 2. Построим пример множества, которое является открытым и ограниченным, но не является измеримым по Жордану.

Множество Q из примера 1 счетное. Перенумеруем числа из этого множества: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ и рассмотрим множество

$$B = \bigcup_{j=1}^{N} \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}; r_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right),$$

где $0 < \varepsilon < 1/2$.

Множество B является открытым и ограниченным, но, как легко видеть,

$$\overline{m}B > 1, \quad \underline{m}B \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon < 1,$$

и поэтому оно не имеет меры Жордана.

Пример 3. Построим пример ограниченной области, которая не измерима по Жордану.

Очевидно, на прямой такого множества не существует, так как область на прямой — это интервал. Построим требуемое множество на плоскости.

Пусть B — множество на прямой, построенное в примере 2. Как и выше, доказывается, что множество $B \times (0;1)$ является неизмеримым по Жордану, так как

$$\overline{m}(B \times (0;1)) > 1, \quad \underline{m}(B \times (0;1)) < 1.$$

Множество $B \times (0;1)$ является ограниченным и открытым, но не является связным и, следовательно, не является областью. Рассмотрим множество G, являющееся объединением множества $B \times (0;1)$ и открытого прямоугольника $(0;1) \times (0;0,5)$. Множество G является областью, но не будет измеримым по Жордану.

7.4. Мера неограниченных множеств. Неограниченное множество G точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану в обобщенном смысле*, если пересечение этого множества с любым ограниченным измеримым множеством $g \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану. Тогда величина

$$mG = \sup_g m(G \cap g),$$

где sup берется по всем $g \subset \mathbb{R}^n$, называется *обобщенной мерой Жордана* или просто *мерой множества* G.

Примерами неограниченных множеств, измеримых по Жордану в обобщенном смысле, являются все пространство $\mathbb{R}^n$, любое его полупространство, внешность любого n-мерного шара, причем мера любого такого множества равна $+\infty$. Любая гиперплоскость (прямая в $\mathbb{R}^2$, плоскость в $\mathbb{R}^3$) и любое множество на гиперплоскости является измеримым множеством пространства $\mathbb{R}^n$, мера которых равна нулю. Данное выше определение эквивалентно следующему:

Неограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану в обобщенном смысле*, если для любой n-мерной клетки Δ множество $G \cap \Delta$ измеримо по Жордану. Тогда величина

$$mG = \sup_\Delta m(G \cap \Delta),$$

где sup берется по всем n-мерным клеткам, называется *мерой множества* G.

Для произвольных множеств (ограниченных и неограниченных) справедливы следующие утверждения:

1. Если множества G и G' измеримы, то множества $G \cup G'$ и $G \cap G'$ тоже измеримы и справедливо равенство
$$m(G \cup G') + m(G \cap G') = mG + mG'.$$
2. Если множества G и g измеримы, то множество $G \setminus g$ тоже измеримо. Причем, если $g \subset G$, то
$$m(G \setminus g) + mg = mG.$$
3. Множество G измеримо тогда и только тогда, когда $m\,\partial G = 0$.

Предлагается доказать эти утверждения в качестве упражнения.

Глава 7. Определенный интеграл

§ 1. Определение и критерии существования интеграла Римана

1.1. Разбиения промежутка на промежутки. В этом параграфе все рассматриваемые промежутки, как правило, являются конечными и непустыми, хотя это не всегда формулируется. В тех же случаях, когда эти условия существенные, они либо явно формулируются, либо легко видны из контекста.

Определение 1. *Разбиением промежутка* Δ называется любое конечное множество попарно непересекающихся промежутков $\Delta_1, \dots, \Delta_N$, объединение которых равно Δ.

Разбиение промежутка Δ на промежутки $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ будем обозначать $\tau(\Delta)$ или просто τ с разными индексами. Таким образом,

$$\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}. \tag{1}$$

Для определенности промежутки $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ будем нумеровать слева направо. Так что, если a и b — концы промежутка Δ, а x_{i-1} и x_i — концы промежутка Δ_i, то

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b. \tag{2}$$

Точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ называются *точками разбиения* (1).

Очевидно, любой набор точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих условию (2), задает некоторое разбиение промежутка Δ, причем в случае $N > 1$ таких разбиений не одно, так как точки $x_1, \dots, x_{N-1}$ являются концами двух промежутков разбиения и могут принадлежать любому из них.

Простейшим примером разбиения промежутка Δ с концами a и b является любое разбиение его на N равных по длине промежутков. В этом случае точками разбиения являются точки

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Определение 2. Разбиение $\tau'(\Delta)$ называется *продолжением разбиения* $\tau(\Delta)$, если любой промежуток разбиения τ' содержится в некотором промежутке разбиения τ.

Таким образом, любое продолжение разбиения $\tau(\Delta)=\{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ — это объединение некоторых разбиений промежутков $\Delta_i \in \tau$, $i = 1, \dots, N$.

Легко видеть, что если разбиение τ' — продолжение разбиения τ, а τ — продолжение разбиения τ'', то τ' — продолжение разбиения τ''. Отметим еще одно свойство разбиений промежутка.

Лемма. *Для любых двух разбиений заданного промежутка существует третье разбиение, которое является продолжением каждого из данных разбиений.*

Доказательство. Заметим, что пересечение любых двух промежутков есть промежуток или пустое множество. Тогда, очевидно, для любых разбиений

$$\tau'(\Delta) = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{N'}\}, \quad \tau''(\Delta) = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{N''}\}$$

совокупность всевозможных непустых пересечений вида $\Delta'_i \cap \Delta_j$ образует разбиение $\tau(\Delta)$, которое является продолжением как для τ', так и для τ''. Лемма доказана.

1.2. Интегральные суммы. Пусть на конечном промежутке Δ задана функция $f(x)$, и пусть τ — некоторое разбиение промежутка Δ:

$$\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}.$$

Через m_i и M_i обозначим точные грани функции f на промежутке Δ_i:

$$m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),$$

а через $|\Delta_i|$ — длину промежутка Δ_i. Очевидно, если x_{i-1} и x_i — концы промежутка Δ_i, то $|\Delta_i| = x_i - x_{i-1}$, поэтому вместо Δ_i иногда будем писать Δx_i.

Определение 1. Для функции $f(x)$, $x \in \Delta$, и разбиения $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ суммы

$$\sum_{i=1}^{N} m_i|\Delta_i| \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{N} M_i|\Delta_i|$$

называются *интегральными суммами Дарбу* (соответственно, *нижней* и *верхней*) и обозначаются $s(f;\tau)$ и $S(f;\tau)$.

Очевидно, что для любой функции $f(x)$, $x \in \Delta$, и любого разбиения $\tau(\Delta)$ справедливо неравенство

$$s(f;\tau) \leq S(f;\tau). \tag{1}$$

Докажем еще несколько свойств интегральных сумм Дарбу.

Лемма 1. *Если разбиение $\tau'(\Delta)$ является продолжением разбиения $\tau(\Delta)$, то*

$$s(f;\tau') \geq s(f;\tau), \quad S(f;\tau') \leq S(f;\tau). \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, что разбиение τ' можно получить из разбиения τ за конечное число шагов, в каждом из которых один из промежутков делится на два непересекающихся промежутка.

Пусть, например, промежуток Δ_i разделен на два непересекающихся промежутка Δ_{i_1} и Δ_{i_2}. Тогда, если m_i, m_{i_1} и m_{i_2} — точные нижние грани функции f на Δ_i, Δ_{i_1} и Δ_{i_2} соответственно, то, очевидно, $m_{i_1} \geq m_i$, $m_{i_2} \geq m_i$, и поэтому

$$m_i|\Delta_i| = m_i(|\Delta_{i_1}| + |\Delta_{i_2}|) \leq m_{i_1}|\Delta_{i_1}| + m_{i_2}|\Delta_{i_2}|.$$

Таким образом, при делении на два непересекающихся промежутка одного из промежутков разбиения нижняя сумма Дарбу может только увеличиться. Отсюда и следует первое из неравенств (2). Второе неравенство доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой функции $f(x)$, $x \in \Delta$, и любых разбиений $\tau'(\Delta)$ и $\tau''(\Delta)$ справедливо неравенство*

$$s(f;\tau') \le S(f;\tau'').$$

Доказательство. Как известно, для любых разбиений $\tau'(\Delta)$ и $\tau''(\Delta)$ существует разбиение $\tau(\Delta)$, которое является продолжением и для τ', и для τ''. Тогда

$$s(f;\tau') \le s(f;\tau) \le S(f;\tau) \le S(f;\tau''),$$

где использованы сначала первое из неравенств (2), затем неравенство (1) и, наконец, второе из неравенств (2). Лемма 2 доказана.

Кроме интегральных сумм Дарбу, будем рассматривать еще интегральные суммы Римана.

Определение 2. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in \Delta$, и некоторое разбиение $\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ промежутка Δ. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)|\Delta_i|,$$

где $\xi_i \in \Delta_i$, называется *интегральной суммой Римана функции f* и обозначается $\sigma(f;\tau)$ или $\sigma(f;\tau;\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.

Очевидно, для любого разбиения $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ справедливы неравенства

$$s(f;\tau) \le \sigma(f;\tau;\xi) \le S(f;\tau)$$

при любом выборе точек $\xi_i \in \Delta_i$. Кроме того,

$$s(f;\tau) = \inf_{\xi} \sigma(f;\tau;\xi), \qquad S(f;\tau) = \sup_{\xi} \sigma(f;\tau;\xi).$$

1.3. Интеграл Римана. Выше было доказано, что для любой функции $f(x)$, определенной на конечном промежутке Δ, и для любых разбиений $\tau'(\Delta)$ и $\tau''(\Delta)$ справедливо неравенство

$$s(f;\tau') \le S(f;\tau'').$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\tau} s(f;\tau) \le \inf_{\tau} S(f;\tau), \tag{1}$$

где sup и inf берутся по всем разбиениям τ промежутка Δ. Действительно, фиксируя τ'' и меняя τ', получим неравенство

$$\sup_{\tau} s(f;\tau) \le S(f;'') \quad \forall \tau'',$$

а из него — неравенство (1).

Определение 1. Точные грани $\sup\limits_{\tau} s(f;\tau)$ и $\inf\limits_{\tau} S(f;\tau)$ называются *интегралами Дарбу* (соответственно, *нижним* и *верхним*) *от функции f по промежутку* Δ и обозначаются $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$. Таким образом,

$$\underline{J}(f) = \sup_{\tau} s(f;\tau), \quad \overline{J}(f) = \inf_{\tau} S(f;\tau),$$

причем $\underline{J}(f) \le \overline{J}(f)$ для любой функции f, определенной на конечном промежутке Δ.

Определение 2. Если интегралы Дарбу от функции f по промежутку Δ конечны и равны между собой, то функция f называется *интегрируемой по Риману на промежутке* Δ, а число

$$J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

называется *интегралом Римана от функции f по промежутку* Δ и обозначается $\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx$.

Из этого определения следует, что если функция f интегрируема на промежутке Δ, то

$$s(f;\tau) \le \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \le S(f;\tau) \quad \forall\,\tau(\Delta).$$

Заметим, что интеграл от функции f не зависит от того, как обозначена независимая переменная, так что вместо x можно писать любую другую букву. Иногда интеграл $\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx$ обозначают короче — $\int f\,d\Delta$. Последнее обозначение предпочитают в теории криволинейных и кратных интегралов.

Пример 1. Функция $f(x)$, $x \in \Delta$, определенная на промежутке Δ, называется *ступенчатой*, если существует разбиение $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ такое, что

$$f(x) = c_i \quad \forall\,x \in \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Очевидно, ступенчатая функция f интегрируема на любом конечном промежутке Δ и

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} c_i |\Delta_i|.$$

В частности, если функция f отлична от нуля лишь в конечном числе точек, то $\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = 0$.

Пример 2. Функция Дирихле не интегрируема по Риману на любом конечном промежутке Δ, у которого $|\Delta| > 0$, так как

$$s(f;\tau) = 0, \quad S(f;\tau) = |\Delta|$$

для любого разбиения $\tau(\Delta)$.

Пример 3. Для любого промежутка Δ и любого числа T через $\Delta + T$ обозначим промежуток, который получается из Δ сдвигом на T, т.е. $\Delta + T$ — это множество всех $x + T$, где $x \in \Delta$.

Рассмотрим периодическую функцию f с периодом T и некоторый промежуток $\Delta \subset D_f$.

Очевидно, любому разбиению $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ промежутка Δ соответствует разбиение $\tau(\Delta + T) = \{\Delta_1 + T, \ldots, \Delta_N + T\}$ промежутка $\Delta + T$ и наоборот, причем

$$s(f;\tau(\Delta)) = s(f;\tau(\Delta + T)),$$

$$S(f;\tau(\Delta)) = S(f;\tau(\Delta + T)),$$

Поэтому, если f интегрируема на промежутке Δ, то она интегрируема и на $\Delta + T$ и

$$\int\limits_{\Delta+T} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx.$$

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то она ограничена на Δ.*

Доказательство. Пусть $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение промежутка Δ. Тогда, если функция f является неограниченной сверху на Δ, то она не ограничена сверху, и на некотором промежутке $\Delta_i \in \tau$, у которого $|\Delta_i| > 0$. Таким образом, если функция f является неограниченной сверху, то $S(f;\tau) = +\infty \ \forall \tau$, и поэтому f не будет интегрируемой на Δ.

Аналогично доказывается, что если f является неограниченной снизу, то $s(f;\tau) = -\infty \, \forall \tau$, и поэтому f не будет интегрируемой на Δ. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in \Delta$, была интегрируема по Риману на промежутке Δ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau(\Delta): \quad S(f;\tau) - s(f;\tau) < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то, согласно определению, для любого $\varepsilon > 0$ выполняются условия:

$$\exists \tau'_\varepsilon(\Delta): \ J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau'_\varepsilon) \le J(f),$$

$$\exists \tau''_\varepsilon(\Delta): \ J(f) \le S(f;\tau''_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Через τ_ε обозначим разбиение, которое является продолжением разбиений τ'_ε и τ''_ε. Тогда

$$s(f;\tau'_\varepsilon) \le s(f;\tau_\varepsilon) \le S(f;\tau_\varepsilon) \le S(f;\tau''_\varepsilon).$$

Следовательно,

$$J(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;\tau_\varepsilon) \le S(f;\tau_\varepsilon) < J(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

и поэтому для $\tau_\varepsilon(\Delta)$ выполняется условие (2).

Пусть теперь функция f на промежутке Δ удовлетворяет условию (2). Тогда

$$s(f;\tau) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le S(f;\tau),$$

и поэтому $\overline{J}(f) - \underline{J}(f) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\overline{J}(f) = \underline{J}(f)$ т.е. функция f интегрируема на промежутке Δ. Теорема 2 доказана.

Доказанная теорема называется *критерием Римана интегрируемости функции*. Во многих случаях ее удобно формулировать в терминах колебания функции на множестве.

Определение 3. Пусть заданы функция f и некоторое множество $g \subset D_f$. Тогда разность

$$\sup_{x\in g} f(x) - \inf_{x\in g} f(x)$$

называется *колебанием функции f на множестве g* и обозначается $\omega(f;g)$.

Теорема 2′. *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in \Delta$, была интегрируема на промежутке Δ, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало разбиение $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ такое, что*

$$\sum_{i=1}^{N} \omega(f;\Delta_i)|\Delta_i| < \varepsilon.$$

Следствие. *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in \Delta$, была интегрируема на промежутке Δ, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} (S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k)) = 0. \tag{3}$$

В этом случае

$$\lim_{k\to\infty} s(f;\tau_k) = \lim_{k\to\infty} S(f;\tau_k) = \int_\Delta f(x)\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Из условия (3) следует сразу условие (2). Если же выполнено условие (2), то, полагая $\varepsilon = 1/k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ построим последовательность разбиений $\tau_k(\Delta)$, для которой выполняется условие (3). Наконец, равенства (4) следуют из того, что

$$0 \leq J(f) - s(f; \tau_k) \leq S(f; \tau_k) - s(f; \tau_k) \to 0,$$

$$0 \leq S(f; \tau_k) - J(f) \leq S(f; \tau_k) - s(f; \tau_k) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следствие доказано.

1.4. Площадь криволинейной трапеции. Из определений меры Жордана и интеграла Римана вытекает следующий критерий интегрируемости неотрицательной функции.

Теорема. *Для того чтобы неотрицательная функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на промежутке $\Delta \subset D_f$, необходимо и достаточно, чтобы множество*

$$G = \{(x; y) : x \in \Delta, \ 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{1}$$

было измеримо по Жордану. В этом случае

$$mG = \int_{\Delta} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение промежутка Δ. Построим множества

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i \times (0; m_i), \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i \times [0; M_i], \tag{3}$$

где

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x).$$

Эти множества измеримы по Жордану,

$$g_\tau \subset G \subset G_\tau \quad \text{и} \quad mg_\tau = s(f; \tau), \quad mG_\tau = S(f; \tau).$$

Тогда

$$s(f; \tau) \leq \underline{m}G \leq \overline{m}G \leq S(f; \tau),$$

причем эти неравенства выполняются для любого разбиения $\tau(\Delta)$. Следовательно,

$$\underline{J}(f) \leq \underline{m}G \leq \overline{m}G \leq \overline{J}(f),$$

и поэтому если функция f интегрируема на Δ, то множество G имеет площадь и справедлива формула (2).

Докажем теперь, что если множество G измеримо по Жордану, то функция f интегрируема по Риману на Δ.

Из измеримости множества G следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют элементарные множества s и S такие, что

$$s \subset G \subset S \quad \text{и} \quad mS - ms < \varepsilon.$$

Рассмотрим первые координаты вершин клеток из s и S. Они производят некоторое разбиение τ промежутка Δ. Для этого разбиения построим множества g_τ и G_τ (см. (3)). Тогда

$$s \subset g_\tau \subset G \subset G_\tau \subset S,$$

$$ms \le s(f;\tau) \le S(f;\tau) \le mS,$$

и поэтому

$$S(f;\tau) - s(f;\tau) \le mS - ms < \varepsilon.$$

Таким образом доказано, что функция f на Δ удовлетворяет условию интегрируемости. Следовательно, функция f интегрируема на Δ и справедлива формула (2). Теорема доказана.

Множество (1) называется *криволинейной трапецией*, соответствующей функции f на промежутке Δ. Теперь доказанный критерий интегрируемости можно сформулировать так:

Неотрицательная функция f интегрируема по Риману на промежутке $\Delta \subset D_f$ тогда и только тогда, когда соответствующая криволинейная трапеция измерима по Жордану.

1.5. Интеграл Римана и последовательности разбиений, мелкость которых стремится к нулю. В теории интеграла Римана особую роль играют последовательности разбиений, мелкость которых стремится к нулю.

Определение 1. Точная верхняя грань расстояний между любыми точками множества g называется *диаметром множества* g и обозначается $\operatorname{diam} g$.

Определение 2. Пусть $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение конечного промежутка Δ. Тогда число, равное $\max\limits_i \operatorname{diam} \Delta_i$, называется *мелкостью разбиения* τ и обозначается $|\tau|$.

Теорема. *Если функция f интегрируема на промежутке $\Delta \subset\in\subset D_f$, то для любой последовательности разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k \in \mathbb{N}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$, имеют место равенства*

$$\lim_{k\to\infty} s(f;\tau_k) = \lim_{k\to\infty} S(f;\tau_k) = \int\limits_\Delta f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Так как

$$s(f;\tau_k) \le J(f) \le S(f;\tau_k) \quad \forall k,$$

то для доказательства равенств (1) достаточно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} (S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k)) = 0.$$

Пусть $\tau_k = \{\Delta_1^k, \ldots \Delta_{N_k}^k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$,

$$\sum\nolimits_k = \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \tag{2}$$

Докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_k = 0$.

Так как функция f интегрируема на промежутке Δ, то она ограничена на Δ, т.е.

$$\exists M: \quad |f(x)| \le M \quad \forall x \in \Delta,$$

и для нее выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau_\varepsilon(\Delta): \quad S(f; \tau_\varepsilon) - s(f; \tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Пусть $\tau_\varepsilon = \{\Delta_1^\varepsilon, \ldots, \Delta_{N_\varepsilon}^\varepsilon\}$. Тогда сумма (2) разбивается на две суммы:

$$\sum\nolimits_k = \sum\nolimits_k^* + \sum\nolimits_k^{**}$$

где $\sum_k^*$ — сумма по всем Δ_i^k, которые не содержатся ни в одном из $\Delta_j^\varepsilon \in \tau_\varepsilon$, а $\sum_k^{**}$ — сумма всех остальных слагаемых.

Сумма $\sum_k^*$ содержит не более N_ε слагаемых, и для каждого из них справедливо неравенство

$$\omega(f; \Delta_j^k)|\Delta_i^k| \le 2M|\tau_k|.$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_k^* \le 2MN_\varepsilon|\tau_k|.$$

Для оценки второй суммы заметим, что

$$\sum\nolimits_k^{**} = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \left(\sum_{\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon} \omega(f; \Delta_i^k)|\Delta_i^k| \right),$$

где внутренняя сумма — это сумма по всем промежуткам $\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon$, а если таких промежутков нет, то она равна нулю.

Очевидно, если $\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon$, то $\omega(f; \Delta_i^k) \le w(f; \Delta_j^\varepsilon)$, и поэтому

$$\sum\nolimits_k^{**} \le \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \omega(f; \Delta_j^\varepsilon) \left(\sum_{\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon} |\Delta_i^k| \right).$$

А так как промежутки Δ_i^k (при фиксированном k) не пересекаются, то

$$\sum_{\Delta_i^k \subset \Delta_j^\varepsilon} |\Delta_i^k| \le |\Delta_j^\varepsilon|.$$

Следовательно,

$$\sum_k^{**} \le \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \omega(f;\Delta_j^\varepsilon)|\Delta_j^\varepsilon| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого k справедливы неравенства

$$0 \le \sum_k < 2MN_\varepsilon|\tau_k| + \varepsilon.$$

Из них следует, что

$$0 \le \varliminf_{k\to\infty} \sum \le \varlimsup_{k\to\infty} \sum_k \le \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_k = 0$. Теорема доказана.

Доказанная теорема и критерий интегрируемости позволяют сформулировать следующее утверждение:

Для того чтобы функция f была интегрируема по Риману на промежутке $\Delta \subset D_f$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k \in \mathbb{N}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$, выполнялось условие

$$\lim_{k\to\infty} (S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k)) = 0. \tag{3}$$

В этом случае это условие выполняется для любой последовательности разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k \in \mathbb{N}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$. Причем

$$\lim_{k\to\infty} s(f;\tau_k) = \lim_{k\to\infty} S(f;\tau_k) = \int\limits_\Delta f(x)\,dx, \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f;\tau_k;\xi) = \int\limits_\Delta f(x)\,dx. \tag{5}$$

Так как равенства (3), (4), (5) выполняются для любой последовательности разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k \in \mathbb{N}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$, то пишут

$$\lim_{|\tau|\to 0} (S(f;\tau) - s(f;\tau)) = 0,$$

$$\lim_{|\tau|\to 0} s(f;\tau) = \lim_{|\tau|\to 0} S(f;\tau) = \int\limits_\Delta f(x)\,dx,$$

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) = \int\limits_\Delta f(x)\,dx.$$

Последнее равенство очень часто берется за определение интеграла Римана.

§ 2. Свойства интегрируемых функций и определенных интегралов

2.1. Свойства интегрируемых функций. Напомним, что интегрируемость по Риману рассматривается только для функций, определенных на конечных промежутках. Поэтому все рассматриваемые далее промежутки конечные.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то она интегрируема и на любом промежутке $\Delta' \subset \Delta$.*

Доказательство. Пусть τ_k', $k \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность разбиений промежутка Δ', у которой $\lim\limits_{\tau_k \to \infty} |\tau_k'| = 0$, а τ_k — разбиение промежутка Δ такое, что $\tau_k' \subset \tau_k$ и $|\tau_k| \le |\tau_k'|$. Тогда

$$S(f;\tau_k') - s(f;\tau_k') \le S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, если f интегрируема на Δ, то она интегрируема и на $\Delta' \subset \Delta$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть объединение промежутков Δ' и Δ'' есть промежуток Δ. Тогда, если функция f интегрируема на Δ' и на Δ'', то она интегрируема и на Δ.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\Delta' \neq \Delta$ и $\Delta'' \neq \Delta$. В этом случае разность $\Delta'' \setminus \Delta' = \Delta'''$ есть промежуток, причем промежутки Δ' и Δ''' не пересекаются и $\Delta' \cup \Delta''' = \Delta$. Пусть τ_k' и τ_k''', $k \in \mathbb{N}$, — последовательности разбиений промежутков Δ' и Δ''', причем такие, что $|\tau_k'| \to 0$ и $|\tau_k'''| \to 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, $\tau_k = \tau_k' \cup \tau_k'''$ — разбиение промежутка Δ. Тогда

$$S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k) = (S(f;\tau_k') - s(f;\tau_k')) + (S(f;\tau_k''') - s(f;\tau_k''')) \to 0$$

при $k \to 0$, так как функция f интегрируема на Δ' и на Δ'', а поэтому и на $\Delta''' \subset \Delta''$ (см. теорему 1). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то и $|f|$ интегрируема на Δ.*

Доказательство. Так как

$$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \le |f(x_1) - f(x_2)| \le \omega(f;\Delta')$$

для любых x_1 и x_2 из $\Delta' \subset \Delta$, то $\omega(|f|;\Delta') \le \omega(f;\Delta')$ для любого промежутка $\Delta' \subset \Delta$.

Пусть разбиения $\tau_k(\Delta) = \{\Delta_1^k, \dots, \Delta_{N_k}^k\}$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N_k} \omega(|f|;\Delta_i^k)|\Delta_i^k| \le \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f;\Delta_i^k)|\Delta_i^k| \to 0$$

при $k \to \infty$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ и $|f(x)| \geq c > 0$ $\forall x \in \Delta$, то и функция $1/f$ интегрируема на Δ.*

Доказательство. Так как

$$\left|\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}\right| \leq \frac{1}{c^2}|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{c^2}\omega(f;\Delta')$$

для любых x_1 и x_2 из $\Delta' \subset \Delta$, то

$$\omega\left(\frac{1}{f};\Delta'\right) \leq \frac{1}{c^2}\omega(f;\Delta')$$

для любого промежутка $\Delta' \subset \Delta$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 3, следует, что функция $1/f$ интегрируема на Δ. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Если функции f и g интегрируемы на промежутке Δ, то функции $f \pm g$ и fg тоже интегрируемы на Δ.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$\omega(f \pm g;\Delta') \leq \omega(f;\Delta') + \omega(g;\Delta')$$

для любого промежутка $\Delta' \subset \Delta$. Отсюда, как и выше, следует интегрируемость функций $f \pm g$ на Δ.

Для доказательства интегрируемости функции fg оценим ее колебание на $\Delta' \subset \Delta$ через колебания функций f и g.

Так как функции f и g интегрируемы на Δ, то они ограничены на Δ. Пусть

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M \quad \forall x \in \Delta.$$

Тогда

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leq M|f(x_1) - f(x_2)| + M|g(x_1) - g(x_2)| \leq$$
$$\leq M\omega(f;\Delta') + M\omega(g;\Delta')$$

для любых x_1 и x_2 из $\Delta' \subset \Delta$, и поэтому

$$\omega(fg;\Delta') \leq M\omega(f;\Delta') + M\omega(g;\Delta')$$

для любого промежутка $\Delta' \subset \Delta$. Отсюда, как и выше, следует, что функция fg интегрируема на Δ. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если функция f ограничена на конечном интервале $(a;b) \subset D_f$ и интегрируема на любом отрезке $[\alpha;\beta] \subset (a;b)$, то она интегрируема и на $(a;b)$.*

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in (a;b)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[\alpha;\beta] \subset (a;b)$ такой, что

$$2M(\alpha - a) + 2M(b - \beta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как функция f интегрируема на $[\alpha;\beta]$, то существует разбиение $\tau = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_N\}$ отрезка $[\alpha;\beta]$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{N}\omega(f;\Delta_i)|\Delta_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, промежутки $\Delta_1,\ldots,\Delta_N$ и $\Delta_0 = (a;\alpha)$, $\Delta_{N+1} = (\beta;b)$ образуют разбиение интервала $(a;b)$, причем такое, что

$$\sum_{i=0}^{N+1}\omega(f;\Delta_i)|\Delta_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, функция f интегрируема на интервале $(a;b)$. Теорема 6 доказана.

Пример. Функция $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$ интегрируема на любом конечном интервале вида $(0;a)$.

Действительно, она ограничена на $(0;a)$ и ступенчатая на любом отрезке $[\alpha;\beta]\subset(0;a)$. А так как ступенчатая функция интегрируема, то данная функция интегрируема на $(0;a)$.

2.2. Классы интегрируемых функций. В доказательствах следующих теорем через $\tau_k = \{\Delta_1^k,\ldots,\Delta_{N_k}^k\}$, $k\in\mathbb{N}$, обозначается произвольная последовательность разбиений отрезка $[a;b]$, у которой $|\tau_k|\to 0$ при $k\to\infty$. В частности, за τ_k можно взять разбиение отрезка $[a;b]$ на k равных по длине промежутков.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\omega(f;\Delta_i^k)\le\omega_f(|\tau_k|),$$

где $\omega_f(|\tau_k|)$ — модуль непрерывности функции f на отрезке $[a;b]$. Так как f равномерно непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\lim_{k\to\infty}\omega_f(|\tau_k|) = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N_k}\omega(f;\Delta_i^k)|\Delta_i^k|\le\omega_f(|\tau_k|)(b-a)\to 0$$

при $k\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если функция f ограничена и непрерывна на конечном интервале $(a;b)$, то она интегрируема на $(a;b)$.*

Действительно, по теореме 1 она интегрируема на любом отрезке $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$, а тогда по теореме 6 из п.2.1 она интегрируема на $(a;b)$.

Следствие 2. *Если функция f ограничена и кусочно-непрерывна на конечном промежутке Δ, то она интегрируема на Δ.*

Доказательство. Пусть a и b — концы промежутка Δ, причем $a < b$, и пусть функция f на интервале $(a;b)$ имеет только одну точку разрыва $c \subset (a;b)$, т.е. она непрерывна на интервалах $(a;c)$ и $(c;b)$. Тогда, согласно следствию 1, она интегрируема на $(a;c)$ и $(c;b)$, а следовательно, и на Δ.

Случай большего числа точек разрыва функции f сводится к предыдущему. Следствие 2 доказано.

Теорема 2. *Если функция f монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Заметим, что у любой монотонной функции f сумма колебаний на непересекающихся промежутках $\Delta_i^k \subset [a;b]$ не превосходит колебания функции f на отрезке $[a;b]$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N_k} \omega(f;\Delta_i^k) \le |f(b) - f(a)|$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N_k} \omega(f;\Delta_i^k)|\Delta_i^k| \le |\tau_k| \cdot |f(b) - f(a)| \to 0$$

при $k \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Если функция f ограничена и монотонна на конечном интервале $(a;b)$, то она интегрируема на $(a;b)$.*

Следствие 4. *Если функция f ограничена и кусочно-монотонна на конечном промежутке Δ, то она интегрируема на Δ.*

Пример 1. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ интегрируема на любом промежутке вида $(0;a]$.

Действительно, она ограничена на $(0;a]$ и непрерывна на любом отрезке $[\alpha;\beta] \subset (0;a]$.

Пример 2. Функция $f(x) = (1/x) - [1/x]$, где $[1/x]$ — целая часть числа $1/x$, интегрируема на любом промежутке вида $(0;a]$.

Действительно, она ограничена: $|f(x)| \le 1$, и интегрируема на любом отрезке $[\alpha;\beta] \subset (0;a]$, так как на любом таком отрезке она кусочно-монотонна (и кусочно-непрерывна).

В конце приведем пример интегрируемой функции, не принадлежащей ни одному из рассмотренных выше классов функций.

Пример 3. Рассмотрим так называемую *функцию Римана* $f(x)$, которая определяется следующим образом: $f(x) = 0$, если x иррациональное или $x = 0$, и $f(x) = 1/q$, если x рациональное, $x \ne 0$ и $x = p/q$, где p — целое, а q — натуральное, причем дробь p/q несократимая. Докажем, что эта функция интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b]$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число N_ε рациональных точек отрезка $[a;b]$, у которых $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$. Поэтому у любого разбиения $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ отрезка $[a;b]$ существует не более N_ε промежутков, на которых колебание функции f больше ε. Кроме того, $\omega(f;\Delta_i) \leq 1$ на любом промежутке Δ_i. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \omega(f;\Delta_i)|\Delta_i| \leq N_\varepsilon|\tau| + \varepsilon(b-a),$$

и поэтому функция f интегрируема на $[a;b]$.

2.3. Свойства линейности, аддитивности и монотонности интеграла. Ранее было доказано, что если функция f ступенчатая на промежутке Δ, т.е. существует разбиение $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ такое, что $f(x) = c_i \ \forall x \in \Delta_i$, то

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} c_i|\Delta_i|.$$

В частности, если $f(x) \neq 0$ лишь в конечном числе точек на Δ, то

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx = 0.$$

Теорема 1 (Свойства линейности интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на промежутке Δ, то для любых постоянных A и B справедливо равенство*

$$\int_{\Delta} \Big(Af(x) + Bg(x)\Big)\,dx = A\int_{\Delta} f(x)\,dx + B\int_{\Delta} g(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\{\tau_k\}$ — последовательность разбиений промежутка Δ, у которой $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\sigma(Af + Bg;\tau_k) = A\sigma(f;\tau_k) + B\sigma(g;\tau_k).$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем формулу (1). Теорема 1 доказана.

Из формулы (1) следует, что если интегрируемую функцию изменить в конечном числе точек, то интеграл от нее не изменится.

Теорема 2 (Свойство аддитивности интеграла). *Пусть промежуток Δ есть объединение непересекающихся промежутков Δ' и Δ''. Тогда, если функция f интегрируема на Δ, то*

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx = \int_{\Delta'} f(x)\,dx + \int_{\Delta''} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\{\tau_k'\}$ и $\{\tau_k''\}$ — последовательности разбиений промежутков Δ' и Δ'' такие, что $|\tau_k'| \to 0$ и $|\tau_k''| \to 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, $\tau_k = \tau_k' \cup \tau_k''$ — разбиение промежутка Δ, и

$$\sigma(f; \tau_k) = \sigma(f; \tau_k') + \sigma(f; \tau_k'').$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем равенство (2). Теорема 2 доказана.

Из формулы (2) следует, что если интегрируемую на интервале $(a; b)$ функцию f как-то доопределить в точках a и b, то интегралы от f на промежутках $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$ равны. Поэтому все эти интегралы обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 3. (Свойство монотонности интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на промежутке Δ и $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in \Delta$, то*

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \le \int\limits_{\Delta} g(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\{\tau_k\}$ — некоторая последовательность разбиений промежутка Δ, у которой $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\sigma(f; \tau_k) \le \sigma(g; \tau_k).$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем неравенство (3). Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на промежутке Δ, то* $\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \ge 0$.

Следствие 2. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{\Delta} |f(x)|\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Из интегрируемости функции f следует интегрируемость и функции $|f|$. А так как

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad \forall x \in \Delta,$$

то, в силу монотонности интеграла,

$$-\int\limits_{\Delta} |f(x)|\,dx \le \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \le \int\limits_{\Delta} |f(x)|\,dx,$$

что и доказывает неравенство (4).

Следствие 3. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ и $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in \Delta$, то*

$$m|\Delta| \leq \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx \leq M|\Delta|.$$

Теорема 4. *Если функция f непрерывна на отрезке Δ, а функция g неотрицательна и интегрируема на Δ, то*

$$\exists \xi \in \Delta: \quad \int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_{\Delta} g(x)\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Если

$$m = \inf_{x \in \Delta} f(x), \quad M = \sup_{x \in \Delta} f(x),$$

то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ $\forall x \in \Delta$, и поэтому

$$mJ(g) \leq J(fg) \leq MJ(g),$$

где $J(g)$ и $J(fg)$ — интегралы от g и fg на Δ.

Если $J(g) = 0$, то, очевидно, $J(fg) = 0$ и формула (5) справедлива для любого $\xi \in \Delta$.

Если же $J(g) > 0$, то

$$m \leq \frac{1}{J(g)} J(fg) \leq M,$$

а так как функция f непрерывна на отрезке Δ, то она на Δ принимает все значения из отрезка $[m; M]$, и поэтому

$$\exists \xi \in \Delta: \quad \frac{1}{J(g)} J(fg) = f(\xi).$$

Теорема 4 доказана.

Следствие 4. *Если функция f непрерывна на отрезке Δ, то*

$$\exists \xi \in \Delta: \quad \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = f(\xi)|\Delta|.$$

Это утверждение получается из теоремы 4 в случае, когда $g(x) = 1$ на Δ.

Теорема 4 и следствие 4 называются *интегральными теоремами о среднем.*

2.4. Интеграл по ориентированному промежутку. До сих пор мы рассматривали определенные интегралы по промежуткам. Например, если функция $f(x)$ определена на отрезке $\Delta = [a;b]$, то говорили об интеграле от функции f на отрезке Δ и этот интеграл обозначали $\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx$. Обычно его обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и говорят, что это есть интеграл от функции $f(x)$ по dx от a до b, т.е. по отрезку Δ от точки a до точки b. Аналогично этому можно и удобно рассматривать интегралы по отрезку Δ от точки b до точки a.

Определение. Для любого конечного промежутка Δ с концами в точках a и b, $a \le b$, и любой интегрируемой на Δ функции f число $\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx$ называется *интегралом от функции $f(x)$ по dx от a до b* и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а число $-\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx$ называется *интегралом от f по dx от b до a* и обозначается $\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению, если $\Delta = [a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Эти интегралы называются *интегралами по ориентированному промежутку* Δ (одна ориентация — от точки a до точки b, а другая — от точки b до точки a).

Сформулируем основные свойства интегралов по ориентированным промежуткам, которые являются естественными обобщениями соответствующих свойств интегралов, рассмотренных в п. 2.3 и 2.4.

Теорема 1. *Если функции f и g интегрируемы на промежутке Δ, то*

$$\int\limits_a^b \Big(Af(x) + Bg(x)\Big)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx + B\int\limits_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$

для любых постоянных A и B и любых a и b из промежутка Δ.

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

для любых a, b, c из промежутка Δ.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на промежутке Δ, а функция g интегрируема и не меняет знака на Δ, то для любых a и b из промежутка Δ существует ξ, лежащее между a и b и такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

В частности, если $g(x) \equiv 1$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{4}$$

Подчеркнем, что в равенствах (1), (3) и (4) точки a и b выбираются из промежутка Δ произвольным образом, т.е. возможны все три случая: $a < b$, $a = b$, $a > b$. В равенстве (2) точки a, b и c выбираются из Δ тоже произвольным образом, т.е. возможны все шесть случаев: $a \le b \le c$, $a \le c \le b$, $b \le a \le c$ и т.д.

Все эти утверждения следуют непосредственно из соответствующих теорем из п.2.3. Предлагается доказать их в качестве упражнения.

2.5. Определенный интеграл как функция верхнего (нижнего) предела. Для любой функции f, определенной и интегрируемой на промежутке Δ, функция

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in \Delta, \tag{1}$$

где $c \in \Delta$, называется *интегралом с переменным верхним пределом*, а функция

$$\Phi(x) = \int_x^c f(t)\,dt, \quad x \in \Delta, \tag{2}$$

— *интегралом с переменным нижним пределом.*

Очевидно, $\Phi(x) = -F(x)$ $\forall x \in \Delta$. Поэтому ограничимся рассмотрением только интегралов с переменным верхним пределом.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то функция* (1) *на Δ удовлетворяет условию*

$$|F(x_2) - F(x_1)| \le \|f\| \cdot |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in \Delta,$$

где $\|f\| = \sup\limits_{x\in\Delta} |f(x)|$.

Действительно, для любых x_1 и x_2 из Δ имеем:

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int\limits_c^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_c^{x_1} f(t)\,dt\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \leq \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt\right| \leq \|f\|\cdot|x_2 - x_1|.$$

Следствие 1. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то функции* (1) *и* (2) *непрерывны на Δ.*

Заметим, что теорему 1 можно сформулировать и так: *Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\left|\int\limits_{\Delta'} f(x)\,dx\right| \leq \|f\|\cdot|\Delta'|$$

для любого промежутка $\Delta' \subset \Delta$.

Действительно, если x_1 и x_2 — концы промежутка Δ', то, очевидно, $|\Delta'| = |x_2 - x_1|$ и

$$\left|\int\limits_{\Delta'} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|.$$

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на промежутке Δ и непрерывна в точке $x_0 \in \Delta$, то функция* (1) *в точке x_0 имеет производную и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \Delta$, $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta F = F(x) - F(x_0)$. Тогда, если $x \neq x_0$, то

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt,$$

и поэтому

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x}\Big(f(t) - f(x_0)\Big)\,dt\right|. \tag{3}$$

Так как функция f непрерывна в точке x_0, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \cap \Delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда и из равенства (3) следует, что

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dt\right| = \varepsilon$$

для любого $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap \Delta$, и поэтому $F'(x_0)$ существует и $F'(x_0) = f(x_0)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке Δ, то функция*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \quad x \in \Delta,$$

где $c \in \Delta$, является точной первообразной для $f(x)$ на Δ.

Следствие 3. *Если функция $f(x)$, определенная на промежутке Δ, ограничена и кусочно-непрерывна на любом отрезке, содержащемся в Δ, то функция (1) является первообразной (может быть, обобщенной) для $f(x)$ на Δ.*

Таким образом, нами доказаны следующие важные утверждения:

1. *Любая непрерывная на промежутке функция на этом промежутке имеет первообразную.*
2. *Операция интегрирования с переменным верхним пределом непрерывных функций является операцией, обратной дифференцированию, т.е. справедлива формула*

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\, dt = f(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

Эта формула называется *формулой дифференцирования интеграла по верхнему пределу*. Из нее очевидным образом следует формула дифференцирования интеграла по нижнему пределу:

$$\frac{d}{dx}\int_x^c f(t)\, dt = -f(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

2.6. Вторая теорема о среднем. В п. 2.3. было доказано, что если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция g на $[a;b]$ интегрируема и не меняет знака, то

$$\exists \xi \in [a;b]: \quad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\, dx.$$

Это утверждение иногда называют *первой теоремой о среднем для интегралов.*

В этом пункте докажем так называемую *вторую теорему о среднем.*

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, а функция g на $[a;b]$ неотрицательна и монотонно убывает, то*

$$\exists\xi \in [a;b]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Отрезок $[a;b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

разобьем на n равных по длине промежутков. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x) - g(x_{i-1}))\,dx + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

Легко видеть, что

$$\left|\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x) - g(x_{i-1}))\,dx\right| \le \sum_{i=1}^n \|f\| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_{i-1}) - g(x))\,dx \le$$
$$\le \|f\| \sum_{i=1}^n (g(x_{i-1}) - g(x_i))\Delta x_i = (g(a) - g(b))\frac{b-a}{n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Положим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, поэтому на $[a;b]$ она имеет как наименьшее, так и наибольшее значения. Пусть

$$m = \min_{x\in[a;b]} F(x), \quad M = \max_{x\in[a;b]} F(x).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) =$$
$$= g(x_0)F(x_1) - g(x_0)F(x_0) + g(x_1)F(x_2) - g(x_1)F(x_1) + \ldots +$$
$$+g(x_{n-1})F(x_n) - g(x_{n-1})F(x_{n-1}) = F(x_1)(g(x_0) - g(x_1)) + \ldots +$$
$$+F(x_{n-1})(g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})) + g(x_{n-1})F(x_n),$$

и поэтому

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le M(g(x_0) - g(x_1) + \ldots +$$
$$+g(x_{n-2}) - g(x_{n-1}) + g(x_{n-1})) = Mg(x_0).$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \ge mg(x_0).$$

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$mg(a) \le \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le Mg(a).$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mg(a).$$

А так как непрерывная функция $F(x)$ на отрезке $[a;b]$ принимает все значения между m и M, то существует $\xi \in [a;b]$, для которого справедливо равенство (1). Теорема 1 доказана..

Теорема 2. *Если на отрезке $[a;b]$ функция f интегрируема, а функция g монотонна, то*

$$\exists \xi \in [a;b]: \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \quad (3)$$

Доказательство. Если функция g монотонно возрастает на $[a;b]$, то функция $G(x) = g(b) - g(x)$ на $[a;b]$ неотрицательна и монотонно убывает. Согласно теореме 1,

$$\exists\xi \in [a;b]: \quad \int\limits_a^b f(x)G(x)\,dx = G(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

А так как

$$\int\limits_a^b f(x)G(x)\,dx = g(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

$$G(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx = g(b)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx - g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx,$$

то

$$g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = -g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

Теорема 2 доказана, так как если $g(x)$ монотонно убывает, то $-g(x)$ монотонно возрастает.

Формулу (3) называют *формулой Бонне*, а теорему 2 — второй *теоремой о среднем для интегралов*. Заметим, что теорему 1 тоже называют второй теоремой теоремой о среднем, а формулу (1) — формулой Бонне.

В формуле (1) значение $g(a)$, вообще говоря, мало связано со значениями функции $g(x)$ в других точках отрезка $[a;b]$. Вместо $g(a)$ можно взять любое $A > g(a)$, и утверждение (1) останется справедливым. Более того, можно взять любое A, удовлетворяющее условию $A \geq g(x) \quad \forall x \in (a;b]$. Наименьшим из таких A будет

$$A = \sup_{x>a} g(x) = g(a+0).$$

Тогда формула (1) принимает вид

$$\exists\xi \in [a;b]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

Относительно утверждения (1) можно сделать то же замечание, что было сделано выше. А именно, значения функции $g(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$ можно менять, не нарушая ее монотонности. Поэтому вместо $g(a)$ можно взять $g(a+0)$, а вместо $g(b)$ — значение $g(b-0)$. Тогда формула (3) принимает вид

$$\exists \xi \in [a;b]: \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

§ 3. Вычисление и преобразование определенных интегралов

3.1. Формула Ньютона–Лейбница. Определенные интегралы можно вычислять по определению, как пределы соответствующих интегральных сумм. Однако такой способ вычисления определенных интегралов требует значительных усилий даже для простых функций. В тех случаях, когда известна первообразная интегрируемой функции, интеграл от нее вычисляется достаточно просто по формуле Ньютона–Лейбница. Чтобы подчеркнуть важность этой формулы, ее иногда называют *основной формулой интегрального исчисления* или даже *основной формулой (теоремой) математического анализа.*

Теорема. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$. Тогда для любых точек $x_0, x_1, \ldots, x$, таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,$$

имеем

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^N \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big).$$

На любом отрезке $[x_{i-1};x_i]$ функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа о среднем, поэтому

$$\exists \xi_i \in (x_{i-1};x_i): \quad F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

и, следовательно,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(f;\tau;\xi),$$

где τ — разбиение отрезка $[a;b]$ точками $x_0, x_1, \ldots, x_N$. А так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Формула (1) доказана в случае, когда $F'(x) = f(x)$ на интервале $(a;b)$. В общем случае, пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F'(x) = f(x)$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек $c_0, c_1, \ldots, c_N$, таких, что $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_N = b$, где $F'(x) \neq f(x)$ или $F'(x)$ не существует. Тогда, как уже доказано,

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx = F(c_i) - F(c_{i-1}),$$

и поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Теорема доказана.

Формула (1) называется *формулой Ньютона-Лейбница*. В ней вместо разности $F(b) - F(a)$ иногда пишут $F(x)\Big|_a^b$, и тогда она принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Выражение $F(x)\Big|_a^b$ называется *двойной подстановкой от a до b*.

Примеры

1. $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2. $$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx = \\ = \frac{1}{2}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Доказанная теорема позволяет сделать полезное замечание о первообразных и одно обобщение теоремы о среднем для интегрируемых функций.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$ (точную или обобщенную), то*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема и имеет точную первообразную, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{2}$$

Действительно, формула (2) следует из формулы (1) и формулы Лагранжа о среднем для функции $F(x)$.

В заключение доказанную теорему сформулируем как теорему об интеграле от производной: *Если функция $F(x)$ $x \in [a;b]$, на отрезке $[a;b]$ непрерывна и кусочно-дифференцируема, а ее производная интегрируема на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Формула (3), как и формула (1), называется формулой Ньютона–Лейбница.

3.2. Формула интегрирования по частям. Выше мы видели, что для простых функций формула Ньютона–Лейбница позволяет сразу вычислить значение определенного интеграла. С другой стороны, с ее помощью можно получить различные формулы, сводящие вычисление одного интеграла к вычислению другого, который в каком-то смысле проще первого. Здесь мы докажем *формулу интегрирования по частям.*

Теорема 1. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы. Тогда, если производные $u'(x)$ и $v'(x)$ на $[a;b]$ интегрируемы, то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $F(x) = u(x)v(x)$ является первообразной для функции $f(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$, причем $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда из формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

очевидным образом следует формула (1). Теорема 1 доказана.

Формулу интегрирования по частям (1) обычно записывают короче:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

В качестве примера применения этой формулы получим *формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.*

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно, а n-я производная кусочно-дифференцируема и ее производная интегрируема на $[a;b]$. Тогда, если $x_0 \in [a;b]$, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \tag{2}$$

для любого $x \in [a;b]$.

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Для $n=1$ формула (2) доказана. Если же $n>1$, то

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f''(t)d(x-t)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt.$$

И вообще, если $1 \le k \le n$, то

$$\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt = -\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(t)d(x-t)^k =$$

$$= \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt,$$

что и доказывает формулу (2) для любого допустимого $n \in \mathbb{N}$. Теорема 2 доказана.

3.3. Теоремы о замене переменной интегрирования. Сначала докажем формулу замены переменной интегрирования в случае, когда все рассматриваемые функции непрерывны.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$ и $\varphi([\alpha;\beta]) \subset \Delta$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \tag{1}$$

где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что оба интеграла в формуле (1) существуют как интегралы от непрерывных функций. Обе подынтегральные функции имеют точные первообразные на соответствующих промежутках, причем, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Следовательно,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 1 доказана.

Формулу (1) иногда записывают так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t).$$

Отсюда видно, что при замене переменного $x = \varphi(t)$ следует всюду заменить x на $\varphi(t)$ и соответственно поменять пределы интегрирования.

Отметим, что в формуле (1) возможны все три случая: $a < b$, $a = b$ и $a > b$. Кроме того, для справедливости формулы (1) не требуется, чтобы отрезок $\varphi([\alpha,\beta])$ совпадал с отрезком $[a;b]$ или $[b;a]$: некоторые значения функции $\varphi(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, могут быть вне этого отрезка.

Пример 1. Вычислим $\int\limits_0^3 x \sin x^2\,dx$.

Воспользуемся заменой $y = x^2$. Тогда, применив формулу (1) справа налево, получим:

$$\int\limits_0^3 x\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \sin x^2\,dx^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^9 \sin y\,dy = -\frac{1}{2}\cos y\Big|_0^9 = \frac{1}{2}(1-\cos 9).$$

Пример 2. Вычислим $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Воспользуемся заменой $x = a\sin t$, $t \in [0;\pi/2]$. Тогда, применив формулу (1) слева направо, получим:

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} |a\cos t|a\cos t\,dt =$$

$$= a|a|\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{a|a|}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a|a|}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a|a|\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{4}\operatorname{sgn} a.$$

Для практического вычисления интегралов методом замены переменной интегрирования вполне достаточно теоремы 1. Однако во многих случаях необходимо делать замену, когда функция не является непрерывной и даже кусочно-непрерывной. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 2. *Пусть функция $y = \varphi(x)$ на отрезке $\Delta = [a;b]$ непрерывна и строго монотонна, а на интервале $(a;b)$ имеет интегрируемую производную. Тогда, если функция $f(y)$ интегрируема на отрезке $\varphi(\Delta)$, то функция $f(\varphi(x))|\varphi'(x)|$ интегрируема на Δ и*

$$\int\limits_{\Delta} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx = \int\limits_{\varphi(\Delta)} f(y)\,dy. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение отрезка Δ. Тогда промежутки $\varphi(\Delta_1), \ldots, \varphi(\Delta_N)$ образуют разбиение отрезка $\varphi(\Delta)$, обозначим его $\varphi(\tau)$.

Рассмотрим интегральные суммы Римана для функций $\psi(x) = f(\varphi(x))|\varphi'(x)|$ и $f(y)$:

$$\sigma(\psi;\tau;\vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{N} f(\varphi(\xi_i)) \cdot |\varphi'(\xi)| \cdot |\Delta_j|, \tag{3}$$

$$\sigma\Big(f;\varphi(\tau);\vec{\eta}\Big) = \sum_{j=1}^{N} f(\eta_j)|\varphi(\Delta_j)|, \tag{4}$$

где $\eta_j = \varphi(\xi_j)$, $\xi_j \in \Delta$. Заметим, что

$$|\varphi(\Delta_j)| = \left|\int_{\Delta_j} \varphi'(x)\,dx\right|,$$

и к последнему интегралу можно применить теорему о среднем. Следовательно,

$$\exists \xi_j^* \in \Delta_j : |\varphi(\Delta_j)| = |\varphi'(\xi_j^*)|\,|\Delta_j|.$$

Оценим модуль разности интегральных сумм (3) и (4). Очевидно,

$$|\sigma(\psi;\tau;\xi) - \sigma(f;\varphi(\tau);\eta)| \le \|f\| \sum_{j=1}^{N} |\varphi'(\xi_j) - \varphi'(\xi_j^*)| \cdot |\Delta_j| \le$$

$$\le \|f\|\Big(S(\varphi';\tau) - s(\varphi';\tau)\Big),$$

где $\|f\| = \sup|f(y)|$, $y \in \varphi(\Delta)$.

Положим $\alpha(\tau) = S(\varphi';\tau) - s(\varphi';\tau)$. Тогда

$$\sigma(\psi;\tau;\xi) \le \sigma(f;\varphi(t);\eta) + \|f\|\alpha(\tau) \le S(f;\varphi(\tau)) + \|f\|\alpha(\tau)$$

для любого выбора точек ξ_j, и поэтому

$$S(\psi;\tau) \le S(f;\varphi(\tau)) + \|f\|\alpha(\tau). \tag{5}$$

Аналогично

$$\sigma(\psi;\tau;\xi) \ge s(f;\varphi(\tau)) - \|f\|\alpha(\tau)$$

для любого выбора точек ξ_j, и поэтому

$$s(\psi;\tau) \ge s(f;\varphi(\tau)) - \|f\|\alpha(\tau), \tag{6}$$

где $\alpha(\tau) \to 0$ при $|\tau| \to 0$.

Из равномерной непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует, что $|\varphi(\tau)| \to 0$ при $|\tau| \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{|\tau|\to 0} s(f;\varphi(\tau)) = \lim_{|\tau|\to 0} S(f;\varphi(\tau)) = \int\limits_{\varphi(\Delta)} f(y)\,dy.$$

Тогда отсюда и из неравенств (5) и (6) получаем, что функция $\psi(x)$ интегрируема на Δ и справедлива формула (2). Теорема 2 доказана.

Заметим, что если в формуле (2) у $\varphi'(x)$ опустить модуль, то она превратится в формулу (1). Действительно, по условию $\varphi'(x)$ не меняет знака на Δ. Если $\varphi'(x) \geq 0$, то формула (2) просто совпадает с формулой (1). Если же $\varphi'(x) \leq 0$, то

$$\int\limits_{\Delta} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx = -\int\limits_{a}^{b} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{\varphi(\Delta)} f(y)\,dy = \int\limits_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)\,dy = -\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy,$$

и снова получаем формулу (1).

Пример 3. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[-a;a] \subset D_f$. Тогда, если f четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$, а если нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Действительно,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

где в первом интеграле сделана замена $x = -t$. Таким образом, для любой функции f, интегрируемой на отрезке $[-a;a]$, справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Из него и следуют наши утверждения.

3.4. Приближенное вычисление интегралов. Формула прямоугольников. Пусть требуется вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$, $x \in [a;b]$. Если известна некоторая ее первообразная, то этот интеграл легко находится по формуле Ньютона–

Лейбница. Однако такой метод пригоден лишь для узкого класса функций, и поэтому в общем случае применяют различные методы приближенного вычисления.

Формулы для приближенного вычисления определенных интегралов называются *квадратурными формулами*. Простейшей квадратурной формулой является *формула прямоугольников*. Здесь рассмотрим только эту формулу.

Отрезок $[a;b]$, на котором задана интегрируемая функция $f(x)$, точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\, i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

разделим на n равных по длине промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Обозначим это разбиение отрезка $[a;b]$ через τ_n и составим интегральную сумму

$$\sigma(g;\tau_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i),$$

где $\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$.

Из определения интеграла следует, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) + \alpha_n(f),$$

где $\alpha_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$. Приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

называется *формулой прямоугольников*. Оценим погрешность этой формулы, т.е. оценим $\alpha_n(f)$.

Легко видеть, что

$$\alpha_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(\xi_i)\big)\,dx. \tag{1}$$

Предположим, что функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет ограниченную вторую производную, и разложим ее по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда для любого $x \in \Delta_i$ существует $\xi_i^* \in \Delta_i$ такое, что

$$f(x) = f(\xi_i) + f'(\xi_i)(x - \xi_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i^*)(x - \xi_i)^2.$$

Подставив это разложение в формулу (1), получим равенство

$$\alpha_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2} f''(\xi_i^*)(x-\xi_i)^2\,dx,$$

из которого следует, что

$$|\alpha_n(f)| \le \frac{1}{2}\|f''\| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-\xi_i)^2\,dx,$$

где $\|f''\| = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. А так как

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-\xi_i)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-\xi)^3\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3, \text{ то } |\alpha_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|.$$

Таким образом, при вычислении интегралов по формуле прямоугольников ошибка имеет порядок $O(1/n^2)$.

3.5. Интегралы от векторных функций. Производные векторных функций определялись и изучались ранее. В этом пункте рассмотрим интегралы от таких функций. Начнем с определения первообразной.

Определение 1. Векторная функция $\mathbf{F}(x)$, $x \in \Delta$, называется *первообразной для векторной функции* $\mathbf{f}(x)$ *на промежутке* Δ, если она на Δ непрерывна, кусочно-дифференцируема и $\mathbf{F}' = \mathbf{f}(x)$ для любого $x \in \Delta$, кроме, может быть, конечного числа значений x из Δ.

Любая первообразная векторной функции $\mathbf{f}(x)$ на промежутке Δ называется *неопределенным интегралом от* $\mathbf{f}(x)$ и обозначается $\int \mathbf{f}(x)\,dx$.

Для векторных функций, как и для числовых, доказывается, что если $\mathbf{F}(x)$ — некоторая первообразная для $\mathbf{f}(x)$, то

$$\int \mathbf{f}(x)\,dx = \mathbf{F}(x) + \mathbf{C}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{C}$ — некоторый постоянный вектор.

Очевидно, если $f_i(x)$ и $F_i(x)$ — координаты векторов $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{F}(x)$, то равенство (1) равносильно n равенствам:

$$\int f_i(x)\,dx = F_i(x) + C_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где C_i — некоторые постоянные, а n — размерность рассматриваемого векторного пространства.

Определение 2. Векторная функция $\mathbf{f}(x)$ называется *интегрируемой на промежутке* Δ, если она определена на Δ и все ее координаты интегрируемы по Риману на Δ. Тогда вектор с координатами

$$\int_\Delta f_i(x)\,dx, \quad r = 1, \ldots, n$$

называется *интегралом от функции* $\mathbf{f}$ *по промежутку* Δ и обозначается $\int_\Delta \mathbf{f}(x)\,dx$.

Из этого определения следует, что если $\{\tau_k\}$ — некоторая последовательность разбиений промежутка Δ, у которой $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$, и $\sigma(\mathbf{f}; \tau_k; \xi)$ — соответствующая интегральная сумма Римана для функции $\mathbf{f}(x)$, то

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(\mathbf{f}; \tau_k; \xi) = \int_\Delta \mathbf{f}(x)\,dx$$

при любом выборе точек ξ. Заметим, что это равенство можно принять за определение интеграла от $\mathbf{f}$ по Δ. Легко видеть, что:

1. *Если* $\mathbf{f}(x)$ *интегрируема на промежутке* Δ, *то для любых* a, b *и* c *из* Δ *справедливо равенство*

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,dx = \int_a^c \mathbf{f}(x)\,dx + \int_c^b \mathbf{f}(x)\,dx.$$

2. *Если функции* $\mathbf{f}(x)$ *и* $\mathbf{g}(x)$ *интегрируемы на* Δ, *то любая их линейная комбинация* $A\mathbf{f}(x)+B\mathbf{g}(x)$ *тоже интегрируема на* Δ *и*

$$\int_a^b (A\mathbf{f}(x) + B\mathbf{g}(x))\,dx = A\int_a^b \mathbf{f}(x)\,dx + B\int_a^b \mathbf{g}(x)\,dx.$$

3. *Если функция* $\mathbf{f}(x)$ *на отрезке* $[a; b]$ *интегрируема и имеет первообразную* $\mathbf{F}(x)$, *то справедлива формула*

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,dx = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a),$$

которая называется, как и для скалярных функций, *формулой Ньютона–Лейбница*.

В конце докажем одно полезное неравенство.

Теорема. *Если векторная функция* $\mathbf{f}(x)$, $x \in \Delta$, *интегрируема на промежутке* Δ, *то числовая функция* $|\mathbf{f}(x)|$ *тоже интегрируема на* Δ *и*

$$\left|\int\limits_{\Delta} \mathbf{f}(x)\,dx\right| \leq \int\limits_{\Delta} |\mathbf{f}(x)|\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала докажем, что функция $|\mathbf{f}(x)|$ интегрируема. Пусть Δ' — некоторый промежуток, содержащийся в Δ. Тогда для любых x и y из Δ' справедливы неравенства

$$\Big||\mathbf{f}(x)| - |\mathbf{f}(y)|\Big| \leq |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f_i; \Delta'),$$

и поэтому

$$\omega(|\mathbf{f}|; \Delta') \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f_i(y); \Delta').$$

Из этого неравенства сразу следует, что если f_i, интегрируемы на Δ, то и $|f|$ интегрируема на Δ.

Пусть теперь $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение промежутка Δ, и пусть $\xi_j \in \Delta_j$, $j = 1, \ldots, N$. Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}(\xi_j)|\Delta_j|\right| \leq \sum_{j=1}^{N} |\mathbf{f}(\xi_i)| \cdot |\Delta_j|.$$

Из этого неравенства в пределе, когда $|\tau| \to 0$, следует неравенство (2). Теорема доказана.

Следствие. *Если векторная функция* $\mathbf{f}(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *имеет непрерывную производную, то*

$$\exists \xi \in (a;b): \quad |\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq |\mathbf{f}'(\xi)|(b-a). \tag{3}$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a) = \int\limits_a^b \mathbf{f}'(x)\,dx,$$

а по доказанной выше теореме

$$\left|\int\limits_a^b \mathbf{f}'(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |\mathbf{f}'(x)|\,dx.$$

К последнему интегралу от скалярной функции применима теорема о среднем, поэтому

$$\exists \xi \in (a;b): \quad \int\limits_a^b |\mathbf{f}'(x)|\,dx = |\mathbf{f}'(\xi)|(b-a)$$

и, следовательно,

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \le |\mathbf{f}'(\xi)|(b-a).$$

Следствие доказано.

Заметим, что неравенство (3) было доказано выше при изучении векторных функций, но то доказательство имело искусственный характер. С помощью интегралов оно доказывается более естественно, правда, только для непрерывно дифференцируемых функций.

§ 4. Несобственные интегралы

4.1. Определения и примеры. Напомним, что интеграл Римана был определен только на конечных промежутках и существует только для ограниченных функций. Обобщим понятие интеграла на случай, когда хотя бы одно из этих условий не выполняется.

Определение 1. Для любой функции $f(x)$, определенной на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, предел функции $\Phi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ при $\eta \to +\infty$ называется *несобственным интегралом от функции f на промежутке* $[a;+\infty)$ (или *от a до* $+\infty$) и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если предел (1) существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, а функция f — *интегрируемой на промежутке* $[a;+\infty)$ *в несобственном смысле*. В противном случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся*.

Аналогично, если функция $f(x)$, определенная на бесконечном промежутке $(-\infty; b]$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi; b]$, то, по определению,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Очевидно,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{+\infty} f(-x)\,dx.$$

Действительно.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\xi\to-\infty} \int_{-b}^{-\xi} f(-t)\,dt == \lim_{\eta\to+\infty} \int_{-b}^{\eta} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{+\infty} f(-x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл вида (2) с бесконечным нижним пределом всегда сводится к интегралу (1) с бесконечным верхним пределом.

Пример 1. Исследуем на сходимость интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при разных значениях параметра α.

Если $\alpha \neq 1$, то, по определению,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\eta\to+\infty} \int_{1}^{\eta} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\eta\to+\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_{1}^{\eta} \right) = \lim_{\eta\to+\infty} \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha},$$

а если $\alpha = 1$, то

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+\infty} \int_{1}^{\eta} \frac{dx}{x} = \lim_{\eta\to+\infty} \ln\eta = +\infty.$$

Следовательно, если $\alpha > 1$, то интеграл сходится, а если $\alpha \leq 1$, то он расходится.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a; b)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; \eta] \subset [a; b)$. Тогда, если функция $f(x)$ является неограниченной на

$[a;b)$, то предел функции $\Phi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ при $\eta \to b-0$ называется *несобственным интегралом от функции f на промежутке* $[a;b)$ (или *от a до b*) и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если предел (3) существует, то интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*.

Аналогично, пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $(a;b]$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi;b] \subset (a;b]$. Тогда, если $f(x)$ является неограниченной на $(a;b]$, то, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi\to a+0} \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Как и выше, доказывается, что и в этом случае

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

В отличие от несобственных интегралов обычный интеграл Римана называется *собственным интегралом*.

Пример 2. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Если $\alpha \le 0$, то функция $1/x^\alpha$ интегрируема по Риману на $(0;1]$, т.е. рассматриваемый интеграл является собственным. Далее, если $\alpha < 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\xi\to+0}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\xi^1\right) = \frac{1}{1-\alpha},$$

т.е. интеграл сходится. Если же $\alpha \ge 1$, то он, очевидно, расходится.

Объединяя полученные результаты, общий вывод обычно формулируют так: рассматриваемый интеграл при $\alpha < 1$ сходится, а при $\alpha \ge 1$ расходится.

Несобственные интегралы вида (1) и (3) называются *интегралами с особым верхним пределом*, а интегралы вида (2) и (4) — *интегралами с особым нижним пределом*.

Рассматривают также несобственные интегралы, у которых оба предела интегрирования a и b являются особыми. В этом случае предполагают, что функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном интервале $(a;b)$ и интегрируема на любом отрезке $[\xi;\eta] \subset (a;b)$. Тогда, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

где c — некоторая точка из интервала $(a;b)$. Здесь в правой части равенства стоят несобственные интегралы с одним особым пределом интегрирования. Интеграл (5) называется *сходящимся*, если сходятся оба несобственных интеграла (от a до c и от c до b). Очевидно, интеграл (5) не зависит от выбора точки $c \subset (a;b)$.

Наконец, рассматривают несобственные интегралы, которые являются суммами несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \tag{6}$$

где $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Здесь в правой части стоит сумма несобственных интегралов вида (1), (2), (3), (4) или (5). Интеграл (6) называется *сходящимся*, если все интегралы в сумме сходятся. В противном случае этот интеграл называется *расходящимся*.

Пример 3. Исследуем на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

По определению,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Как уже показано, при $\alpha \geq 1$ интеграл от 0 до 1 расходится, а при $\alpha \leq 1$ интеграл от 1 до $+\infty$ расходится. Следовательно, данный интеграл расходится при любом α.

4.2. Основные свойства. На несобственные интегралы переносятся многие свойства определенного интеграла Римана. Рассмотрим некоторые из этих свойств.

Здесь и далее будем рассматривать в основном несобственные интегралы с особым верхним пределом, т.е. будем предполагать, что рассматриваемые функции определены на конечном или бесконечном промежутке $[a;b)$ и интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$.

1. *Для любой точки $c \in (a;b)$ справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Его следует понимать так: если сходится один из несобственных интегралов, то сходится и другой, и в этом случае справедливо равенство (1).

2. *Если интегралы от функций f и g сходятся, то интеграл от любой линейной комбинации этих функций $Af + Bg$ тоже сходится и*

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

3. *Если интегралы от функций f и g сходятся и $f(x) \le g(x)$ на $[a;b)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

4. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$ и $\varphi'(t) > 0$. Тогда, если $\varphi(\alpha) = a$ и $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = b$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Ее следует понимать так: если один из интегралов сходится, то другой тоже сходится, и они равны. В частности, один из интегралов может быть собственным.

5. *Если функция $f(x)$, $x \in [a;b)$, на любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} F(x) - F(a). \tag{5}$$

Ее следует понимать так: если интеграл от $f(x)$ сходится, то предел у $F(x)$ при $x \to b$ существует, и наоборот, и, кроме того, справедливо равенство (5). Эта формула называется *формулой Ньютона-Лейбница* и обычно записывается в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

6. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ на промежутке $[a;b)$ непрерывны, а на каждом отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$ они кусочно дифференцируемы и их производные интегрируемы, то справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{6}$$

которую следует понимать так: если существуют два из трех пределов, то существует и третий, и справедливо равенство (6).

Докажем сначала свойство 1. Пусть, например, интеграл от c до b сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b}\left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx\right) =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{\eta\to b}\int_c^\eta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Свойства 2 и 3 доказываются аналогично.

Для доказательства свойства 4 заметим, что функция $x=\varphi(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta)$ имеет обратную $t=\psi(x)$, у которой $\psi'(x)>0$ на $[a;b)$. Тогда, если, например, интеграл от f сходится, то

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim_{\xi\to\beta}\int_\alpha^\xi f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim_{\xi\to\beta}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\xi)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

т.е. интеграл от $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ сходится, и справедливо равенство (4). Аналогично доказывается, что если интеграл от $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ сходится, то интеграл от f сходится, и справедливо равенство (4).

Свойства 5 и 6 предлагается доказать в качестве упражнения. Обратим внимание на то, что не все свойства интегрируемых по Риману функций переносятся на функции, интегрируемые в несобственном смысле. Например, интеграл от функции $f(x) = x^{-1/2}$ на интервале $(0;1)$ сходится, однако интеграл от $f^2(x)=1/x$ на $(0;1)$ расходится.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

У этого интеграла оба предела интегрирования являются особыми. Легко видеть, что для таких несобственных интегралов тоже справедлива формула замены переменной интегрирования, аналогичная формуле (4). Поэтому, положив $x = \sin t$, $t \in [-\pi/2; \pi/2]$, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$$

Следовательно, данный интеграл сходится, равен π, причем заменой $x = \sin t$ он сводится к собственному интегралу.

Пример 2. Вычислим интегралы $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \ln x\, dx$.

К первому интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 dx = -1,$$

так как $x \ln x \to 0$ при $x \to +0$. Следовательно, первый интеграл сходится и равен -1. Для второго интеграла имеем:

$$\forall \eta \geq e \quad \int\limits_1^{\eta} \ln x\, dx \geq \int\limits_e^{\eta} \ln x\, dx \geq \eta - e,$$

и поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \ln x\, dx = +\infty$. Следовательно, второй интеграл расходится.

4.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сравнения. Как и в предыдущем пункте, будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на конечном или бесконечном промежутке $[a; b)$ и интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a; \eta] \subset [a; b)$. Любые другие предположения будем специально оговаривать.

Заметим, что если функция $f(x)$, $x \in [a; b)$, обладающая на $[a; b)$ указанными выше свойствами, является неотрицательной на $[a; b)$, то функция

$$\Phi(\eta) = \int\limits_a^{\eta} f(x)\, dx, \quad \eta \in [a; b), \tag{1}$$

является монотонно возрастающей на $[a;b)$, и поэтому всегда имеет предел при $\eta \to b$: конечный или бесконечный, равный $+\infty$. Следовательно, интеграл от f на $[a;b)$ сходится тогда и только тогда, когда функция (1) является ограниченной. На этом утверждении основаны так называемые *признаки сравнения* сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Теорема 1. *Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a;b)$ и такие, что*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to b. \tag{2}$$

Тогда, если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ тоже сходится. Если же интеграл от f расходится, то и интеграл от g расходится.

Доказательство. Условие (2) означает, что существуют число $M > 0$ и точка $c \in [a;b)$ такие, что

$$f(x) \le Mg(x) \quad \forall x \in (c;b).$$

Поэтому

$$\forall \eta \in (c;b) \quad \int\limits_c^\eta f(x)\,dx \le M \int\limits_c^\eta g(x)\,dx.$$

Отсюда в пределе при $\eta \to b$ получаем неравенство

$$\int\limits_c^b f(x)\,dx \le M \int\limits_c^b g(x)\,dx.$$

Из него следует, что если интеграл от g на $[c;b)$ сходится, то интеграл от f на $[c;b)$ тоже сходится. Если же интеграл от f расходится, то и интеграл от g расходится. Осталось заметить, что интегралы от a до b и от c до b сходятся или расходятся одновременно. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, $x \in [a;b)$, одного порядка при $x \to b$, то интегралы от f и g на $[a;b)$ одновременно сходятся или расходятся.*

Эти утверждения называются *признаками сравнения сходимости несобственных интегралов*. Причем, если изучается интеграл от функции f, то функция g называется *функцией сравнения*.

В качестве функций сравнения часто берут функции вида: $g(x) = 1/x^\alpha$, если $b = +\infty$, и $g(x) = 1/(b-x)^\alpha$, если $b \ne +\infty$.

Следствие 2. *Если неотрицательная функция $f(x)$, $x \in [a;+\infty)$, одного порядка с функцией $1/x^\alpha$ при $x \to +\infty$, то $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.*

Следствие 3. *Если неотрицательная функция $f(x)$, $x \in [a;b)$, где $b \neq +\infty$, одного порядка с функцией $1/(b-x)^\alpha$ при $x \to b-0$, то $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.*

Пример. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(1+\operatorname{sh} x)}{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}\,dx.$$

Этот интеграл имеет две особые точки $x=0$ и $x=+\infty$, и поэтому нужно рассмотреть два интеграла: от 0 до 1 и от 1 до $+\infty$, и исследовать подынтегральную функцию $f(x)$ при $x \to +0$ и при $x \to +\infty$.

При $x \to +0$

$$f(x) \sim \frac{(\operatorname{sh} x)^\alpha}{x^{1/4}(\sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}})} \sim \frac{x^\alpha}{x^{1/4}} = \frac{1}{x^{1/4-\alpha}}.$$

Следовательно (см. следствие 3), $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, если $1/4-\alpha<1$, и расходится, если $1/4-\alpha \geq 1$, т.е. он сходится только для $\alpha > -3/4$.

При $x \to +\infty$

$$\ln(1+\operatorname{sh} x) = x + \ln\left(e^{-x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) \sim x,$$

и поэтому

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}.$$

Следовательно (см. следствие 2), $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если $1/2-\alpha>1$, и расходится, если $1/2-\alpha \leq 1$, т.е. он сходится только для $\alpha < -1/2$.

Таким образом, данный интеграл сходится для $\alpha \in (-3/4;-1/2)$ и расходится при других α.

4.4. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы. Несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

с особым верхним пределом определяется как предел функции

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx, \quad \eta \in [a;b), \tag{2}$$

при $\eta \to b$. Поэтому чтобы этот интеграл сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_\varepsilon \in (a;b): \quad \forall \xi, \eta \in (b_\varepsilon; b) \quad \left|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

так как $\int_\xi^\eta f(x)\,dx = \Phi(\eta) - \Phi(\xi)$. Это утверждение иногда называют *критерием Коши сходимости несобственных интегралов*.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$, определенная на конечном или бесконечном промежутке $[a;b)$, интегрируема на любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$. Тогда, если интеграл от a до b от $|f(x)|$ сходится, то интеграл* (1) *тоже сходится.*

Действительно, если $f(x)$ интегрируема на $[a;\eta]$, то $|f(x)|$ тоже интегрируема на $[a;\eta]$ и

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\right| \le \int_\xi^\eta |f(x)|\,dx$$

для любых ξ и η таких, что $a < \xi < \eta < b$. Отсюда следует, что если для интеграла от $|f(x)|$ выполняется условие Коши, то оно выполняется и для интеграла от $f(x)$.

Таким образом, если интеграл от $|f(x)|$ сходится, то интеграл от $f(x)$ тоже сходится.

Определение. Пусть функция $f(x)$, определенная на промежутке $[a;b)$, интегрируема на любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$. Тогда, если интеграл от $|f(x)|$ на $[a;b)$ сходится, то интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся*. Если же интеграл от $f(x)$ сходится, а интеграл от $|f(x)|$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся*.

Из доказанной выше леммы следует, что если интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится. Очевидно, для исследования интегралов от $f(x)$ на абсолютную сходимость можно применять признаки сравнения для соответствующих интегралов от $|f(x)|$.

Пример 1. Исследуем на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Если $\alpha \le 0$, то интеграл (3) расходится. Действительно, в этом случае

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \ge \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin x\,dx = 2$$

   для любого $n \in \mathbb{N}$, и поэтому не выполняется условие Коши.

2. Если $\alpha > 1$, то интеграл (3) сходится абсолютно. Действительно, в этом случае

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \ge 1,$$

   и интеграл от $1/x^\alpha$ сходится. Тогда по признаку сравнения интеграл (3) сходится абсолютно.

3. Если $0 < \alpha \le 1$, то интеграл (3) сходится. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} = -\left.\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx.$$

   Здесь подстановка от 1 до $+\infty$ равна $\cos 1$, а последний интеграл сходится абсолютно при любом $\alpha > 0$.

Наконец, если $\alpha \le 1$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \ge \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{2n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi},$$

и поэтому для интеграла от $|\sin x|/x^\alpha$ при $\alpha \le 1$ не выполняется условие Коши. Следовательно, если $0 < \alpha \le 1$, то интеграл (3) сходится условно.

В следующих теоремах рассматриваются интегралы вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\alpha;\eta]$. Тогда, если на промежутке $[\alpha;+\infty)$ функция $\Phi(\eta)$ (см. (2)) ограничена, а функция $g(x)$ монотона и $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то интеграл (4) сходится.*

Доказательство. Согласно второй теореме о среднем, для любых ξ и η, $\alpha \le \xi < \eta$, существует $\zeta \in [\xi;\eta]$ такое, что

$$\int_{\xi}^{\eta} f(x)g(x)\,dx = g(\xi)\int_{\xi}^{\zeta} f(x)\,dx + g(\eta)\int_{\zeta}^{\eta} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Так как

$$\int_{\xi}^{\zeta} f(x)\,dx = \Phi(\zeta) - \Phi(\xi)$$

и функция $\Phi(\zeta)$ ограничена, то

$$\exists M:\ \left|\int_{\xi}^{\zeta} f(x)\,dx\right| \le M \quad \forall \xi \ge \alpha, \quad \zeta \ge \alpha.$$

Следовательно,

$$\left|\int_{\zeta}^{\eta} f(x)g(x)\,dx\right| \le M\left(|g(\zeta)| + |g(\eta)|\right).$$

А так как $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то отсюда следует, что для интеграла (4) выполняется условие Коши, и поэтому он сходится. Теорема 1 доказана.

Эта теорема называется *признаком Дирихле сходимости несобственного интеграла.*

Заметим, что на промежутке $[\alpha;+\infty)$ функция $\Phi(\eta)$ заведомо ограничена, если функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g(x)$ монотонна, если она дифференцируема и $g'(x)$ не меняет знака.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\alpha;\eta]$. Тогда, если на промежутке $[\alpha;+\infty)$ интеграл от $f(x)$ сходится, а функция $g(x)$ монотонна и ограничена, то интеграл (4) тоже сходится.*

Доказательство. Так как интеграл от $f(x)$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta_\varepsilon:\quad \forall \zeta, \eta > \eta_\varepsilon \quad \left|\int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

то из равенства (5) следует, что

$$\left|\int\limits_{\zeta}^{\eta} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon\left(|g(\zeta)| + |g(\eta)|\right) \quad \forall \zeta, \eta > \eta_{\varepsilon}.$$

А так как $g(x)$ ограничена, то отсюда следует, что для интеграла (4) выполняется условие Коши, и поэтому он сходится. Теорема 2 доказана.

Эту теорему иногда называют *признаком Абеля сходимости несобственного интеграла*. Ее образно можно сформулировать так:

Если интеграл сходится, то подынтегральную функцию можно умножить на ограниченную монотонную функцию: полученный интеграл тоже будет сходиться.

Заметим, что здесь условие монотонности является существенным. Например, интеграл от 1 до $+\infty$ от функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ сходится, а от функции

$$f(x)\sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

расходится, так как интеграл от $\dfrac{1}{x}$ расходится, а от $\dfrac{\cos 2x}{x}$ расходится (по признаку Дирихле).

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x + \cos x)^{\alpha}}\,dx.$$

Он имеет единственную особенность в точке $+\infty$. При $\alpha \le 0$ он расходится, так как не выполняется условие Коши. А именно, если $\alpha \le 0$, то

$$\int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin x}{(x + \cos x)^{\alpha}}\,dx \ge \int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin x\,dx = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

При $\alpha > 0$ он сходится по признаку Дирихле. Действительно, функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция

$$g(x) = (x + \cos x)^{-\alpha}$$

такая, что $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и $g'(x) \le 0$, если $\alpha > 0$.

Наконец, так как

$$\left|\frac{\sin x}{(x+\cos x)^\alpha}\right| \sim \frac{|\sin x|}{x^\alpha}$$

при $x \to +\infty$, то данный интеграл сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится интеграл от $|\sin x|/x^\alpha$. А он сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$ (см. пример 1).

Следовательно, данный интеграл при $\alpha > 0$ сходится, а при $\alpha \le 0$ расходится. Причем, если $0 < \alpha \le 1$, то он сходится условно, а если $\alpha > 1$, то абсолютно.

Пример 3. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx, \quad \alpha > 0.$$

Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha + \sin x}$$

такая, что $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Однако $g(x)$ монотонна только при $\alpha \ge 1$, так как

$$g'(x) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{(x^\alpha + \sin x)^2}$$

меняет знак, если $0 < \alpha < 1$. Следовательно, по признаку Дирихле можно лишь утверждать, что данный интеграл сходится при $\alpha \ge 1$.

Для полного исследования данного интеграла применим другой метод.

Заметим, что если $\alpha > 0$, то

$$\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha}\cdot\frac{1}{1+\sin x/x^\alpha} = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right)$$

при $x \to +\infty$. Интеграл от $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ сходится при любом $\alpha > 0$. Положим

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} - \frac{\sin x}{x^\alpha}.$$

Тогда $\varphi(x) \sim -\dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}$ при $x \to +\infty$, и поэтому интеграл от $\varphi(x)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл от функции

$$\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

По признаку Дирихле интеграл от функции $\frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}$ сходится при любом $\alpha > 0$. Следовательно интеграл от $\varphi(x)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл от $1/x^{2\alpha}$. Поэтому, данный интеграл сходится, если $2\alpha > 1$, и расходится, если $2\alpha \leq 1$.

Наконец, как и в примере 2, доказывается, что данный интеграл сходится абсолютно только при $\alpha > 1$.

Таким образом, данный интеграл при $\alpha \leq 1/2$ расходится, а при $\alpha > 1/2$ сходится. Причем, если $1/2 < \alpha \leq 1$, то он сходится условно, а если $\alpha > 1$, то абсолютно.

§ 5. Приложения определенных интегралов

5.1. Вычисление площадей плоских фигур. В п.1.4. было доказано, что неотрицательная функция $f(x)$, $x \in [a;b]$, интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда криволинейная трапеция

$$G = \{(x;y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

измерима по Жордану. Причем в этом случае

$$mG = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Здесь докажем некоторое обобщение формулы (1).

Теорема 1. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f_1(x) \leq f_2(x)$ $x \in [a;b]$, то множество $G = \{(x;y) : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ измеримо и*

$$mG = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Если $f_1(x) \geq 0$ на $[a;b]$, то формула (2) сразу следует из формулы (1), так как в этом случае $mG = mG_2 - mG_1$, где G_1 и G_2 — криволинейные трапеции, соответствующие функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Теперь заметим, что при параллельном переносе мера клетки, а следовательно, и мера произвольного множества не меняются. Поэтому общий случай сводится к рассмотренному сдвигом множества G вверх параллельно оси ординат. Теорема 1 доказана.

Пример 1. Докажем, что мера Жордана треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними. В частности, площадь треугольника не зависит от расположения его на плоскости.

Вычислим сначала площадь прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат.

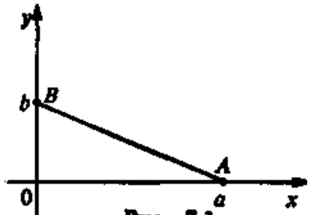

Рис. 7.1

Заметим, что мера клетки не меняется при параллельном переносе, при зеркальном отражении относительно осей координат и при изменении порядка нумерации координат. Следовательно, мера Жордана тоже инвариантна относительно таких преобразований. Поэтому для вычисления площади прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны осям координат, достаточно рассмотреть треугольник с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$, где $a > 0$ и $b > 0$ (рис. 7.1).

Он является криволинейной трапецией для функции

$$y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad x \in [0;a],$$

и поэтому

$$\text{пл.}\, OAB = \int_a^b b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\, dx = ab - \frac{b}{a}\int_0^a x\, dx = \frac{1}{2}ab.$$

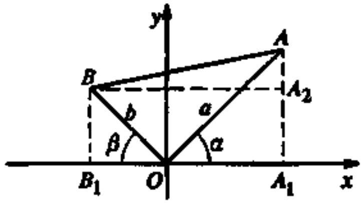

Рис. 7.2

Теперь рассмотрим произвольно расположенный прямоугольный треугольник. Согласно сделанному выше замечанию, не ограничивая общности, можно считать, что он расположен в верхней полуплоскости, и вершина прямого угла лежит в начале координат (рис. 7.2). Тогда

$$\text{пл.}\, OAB = \text{пл.}\, B_1A_1A_2B + \text{пл.}\, BA_2A - \text{пл.}\, OA_1A - \text{пл.}\, B_1OB =$$
$$= (b\cos\beta + a\cos\alpha)b\sin\beta + \frac{1}{2}(b\cos\beta + a\cos\alpha)(a\sin\alpha - b\sin\beta) -$$
$$- \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}b^2\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}ab(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos a\cdot\sin\beta) =$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}ab,$$

так как $\alpha + \beta = \pi/2$.

Формула для площади прямоугольного треугольника доказана. Из нее формула для площади произвольного треугольника выводится обычным образом.

З а м е ч а н и е. Из того, что площадь любого прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов, следует важное утверждение: *мера Жордана на плоскости инвариантна относительно ортогональных преобразований*, т.е. если множество

G^* получено из измеримого множества G ортогональным преобразованием, то множество G^* измеримо и $mG = mG^*$.

В общем случае это утверждение будет доказано в теории кратных интегралов.

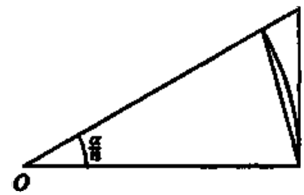

Рис. 7.3

Пример 2. Найдем площадь кругового сектора. Пусть g — круговой сектор радиуса r, дуга которого равна α радиан. Разобьем дугу сектора на n равных по длине дуг и соответственно сам сектор g на n секторов $g_1, \ldots, g_n$. В каждый из секторов g_j впишем равнобедренный треугольник и около каждого опишем прямоугольный треугольник, как это показано на рис. 7.3.

Тогда площадь вписанного треугольника равна $\frac{1}{2}r^2\sin\frac{\alpha}{n}$, а площадь описанного треугольника равна $\frac{1}{2}r^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}$, и поэтому

$$n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{\alpha}{n} \le \underline{m}g \le \overline{m}g \le n\cdot\frac{1}{2}r^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}.$$

Отсюда в пределе при $n\to\infty$ получаем, что множество g измеримо и

$$mg = \frac{1}{2}r^2\alpha. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть ρ, φ — полярные координаты на плоскости. Тогда, если неотрицательная функция $\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, интегрируема, то множество*

$$G = \{(\rho,\varphi) : \varphi\in[\alpha;\beta],\ 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}$$

измеримор и

$$mG = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_N\}$ — некоторое разбиение отрезка $[\alpha;\beta]$, и пусть

$$m_i = \inf_{\varphi\in\Delta_i}\rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi\in\Delta_i}\rho(\varphi).$$

Рассмотрим множества

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^N \{(\rho,\varphi) : \varphi\in\Delta_i,\ 0\le\rho\le m_i\},$$

$$G_\tau = \bigcup_{i=1}^N \{(\rho,\varphi) : \varphi\in\Delta_i,\ 0\le\rho\le M_i\}.$$

Из формулы (3) следует, что

$$mg_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i^2|\Delta_i| = \frac{1}{2}s(\rho^2;\tau),$$

$$mG_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} M_i^2|\Delta_i| = \frac{1}{2}S(\rho^2;\tau).$$

А так как $g_\tau \subset G \subset G_\tau$ $\forall \tau$, то

$$\frac{1}{2}s(\rho^2;\tau) \le \underline{m}G \le \overline{m}G \le \frac{1}{2}S(\rho^2;\tau) \quad \forall \tau.$$

Отсюда и следует, что множество G измеримо и справедлива формула (4). Теорема 2 доказана.

5.2. Объем тела вращения. Для заданной функции $f(x)$, $x \in [a;b]$, множество

$$G = \{(x,y,z) : x \in [a;b],\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$$

называется *телом вращения*, соответствующим этой функции. Очевидно, функциям $f(x)$, $-f(x)$ и $|f(x)|$ соответствует одно и то же тело вращения. Поэтому, не ограничивая общности, рассматривают тела вращения только для неотрицательных функций.

В п.6.3. главы 6 было доказано, что объем прямого цилиндра равен произведению меры основания на высоту. В частности, объем прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты h равен произведению $\pi R^2 h$.

Теорема. *Если неотрицательная функция $f(x)$, $x \in [a;b]$, интегрируема, то соответствующее тело вращения G измеримо и*

$$mG = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a;b]$, и пусть

$$m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x).$$

Для этого разбиения рассмотрим множества

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{N}\{(x,y) : x \in \Delta_i,\ y^2 + z^2 \le m_i^2\},$$

$$G_\tau = \bigcup_{i=1}^{N}\{(x,y) : x \in \Delta_i,\ y^2 + z^2 \le M_i^2\}.$$

Очевидно, $g_\tau \subset G \subset G_\tau$ и $mg_\tau = \pi s(f^2;\tau)$, $mG_\tau = \pi S(f^2;\tau)$. Следовательно,

$$\pi s(f^2;\tau) \le \underline{m}G \le \overline{m}G \le \pi S(f^2;\tau)$$

для любого разбиения τ отрезка $[a;b]$, и поэтому множество G измеримо и справедлива формула (1). Теорема доказана.

Пример. Вычислим объем тела, которое получается при вращении графика функции $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, вокруг а) оси Ox, б) оси Oy.

В случае а) по формуле (1) получаем:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2)^2\,dx = \pi \cdot \frac{1}{5}\, x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{5}.$$

В случае б) заметим, что рассматриваемое тело вращения соответствует функции $x = \sqrt{y}$, $0 \le y \le 1$. Поэтому

$$V = \pi \int_{0}^{1} (\sqrt{y})^2\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

5.3. Длина дуги кривой. Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), a \le t \le b\}$ — некоторая непрерывно дифференцируемая кривая, а $s(t)$ — длина дуги этой кривой от точки A, у которой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a)$, до переменной точки $M \in \Gamma$. Тогда, как известно,

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|, \tag{1}$$

и поэтому для длины S кривой Γ справедлива формула

$$S = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{2}$$

Если кривая Γ плоская и $x(t)$, $y(t)$ — координаты вектора $\mathbf{r}(t)$, то

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

В частности, если Γ — график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим непрерывно дифференцируемую кривую $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ t \in \Delta\}$, где Δ — конечный или бесконечный промежуток. Будем считать, что она ориентирована своим параметром t. Выберем некоторую начальную точку $A \in \Gamma$ и через $s(t)$ обозначим *переменную длину дуги ориентированной кривой* Γ. По определению, функция $s(t)$ такая, что $|s(t)|$ — это длина дуги от точки A до точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$, $s(a) = 0$, $s(t) \geq 0$, если $t \geq a$, и $s(t) \leq 0$, если $t \leq a$. Тогда, как и выше, справедлива формула (1), и поэтому

$$s(t) = \int\limits_a^t |\mathbf{r}'(\xi)|\, d\xi, \quad \forall t \in \Delta. \tag{4}$$

В частности, если a и b — начало и конец промежутка Δ, то для длины S кривой Γ справедлива формула (2), где интеграл может быть как собственным, так и несобственным.

Для плоской кривой в случае явного задания формула (4) (см. также (3)) принимает вид:

$$s(x) = \int\limits_a^x \sqrt{1 + f'^2(\xi)}\, d\xi. \tag{5}$$

Пример. Найдем переменную длину дуги параболы $y = x^2$, на которой выбрана начальная точка $x = 0$ и которая ориентирована параметром x.

По формуле (5) находим:

$$s(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1 + 4\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, применим формулу интегрирования по частям:

$$s(x) = \frac{1}{2} t\sqrt{1 + t^2}\Big|_0^{2x} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt =$$

$$= x\sqrt{1 + 4x^2} - s(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Следовательно,

$$s(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}.$$

В частности, длина кривой, заданной функцией $y = x^2$, $-1 \le x \le 0$, равна

$$s(0) - s(-1) = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln(-2 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}) = s(1).$$

5.4. Работа силы вдоль пути. Пусть по непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s),\ 0 \le s \le S\}$, где s — переменная длина дуги, движется точка M под действием переменной силы $F(s)$, направленной по касательной к Γ. Пусть, далее, $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение отрезка $[0; S]$.

Если на Δ_i, сила F постоянна, то работа A_i силы F на Δ_i, по определению, равна $F|\Delta_i|$. В общем случае для работы A_i справедливы неравенства

$$m_i|\Delta_i| \le A_i \le M_i|\Delta_i|,$$

где $m_i = \inf\limits_{s\in\Delta_i} F(s)$, $M_i = \sup\limits_{s\in\Delta_i} F(s)$.

Следовательно, если A — работа силы F вдоль пути Γ, то

$$\sum_{i=1}^{N} m_i|\Delta_i| \le A \le \sum_{i=1}^{N} M_i|\Delta_i|$$

для любого разбиения τ отрезка $[0; S]$. Поэтому, если функция $F(s)$ интегрируема, то справедлива формула:

$$A = \int_0^S F(s)\,ds. \tag{1}$$

Строго говоря, эта формула является определением работы силы F вдоль кривой Γ. Из нее можно получить соответствующую формулу в случае произвольного параметра t на кривой Γ. Действительно, если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема, и $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$. Следовательно,

$$A = \int_a^b F(t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Пусть теперь сила F имеет произвольное направление. Тогда величина силы, совершающая работу вдоль Γ, равна скалярному произведению $(\mathbf{F}, \mathbf{e})$, где $\mathbf{F}$ — вектор силы, а $\mathbf{e}$ — единичный вектор касательной к кривой Γ. Если кривая Γ гладкая, то $\mathbf{e} = d\mathbf{r}/ds$, и, следовательно,

$$A = \int_0^S \left(\mathbf{F}, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) ds. \tag{2}$$

В случае произвольного параметра t единичный вектор касательной вычисляется по формуле $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$, и поэтому

$$A = \int_a^b (\mathbf{F}(t),\ \mathbf{r}'(t))\,dt.$$

Интегралы (1) и (2) являются типичными примерами криволинейных интегралов, которые будут подробно рассмотрены в следующем параграфе.

5.5 Площадь поверхности вращения. Пусть на плоскости уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

задана кривая γ. Тогда множество S точек пространства, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$x = x(t), \quad y^2 + z^2 = y^2(t), \quad t \in [a; b],$$

называется *поверхностью вращения кривой* γ *вокруг оси* Ox. Если, кроме того, кривая γ спрямляема и s — переменная длина дуги, а l — длина кривой γ, то величина

$$\text{пл. } S = 2\pi \int_0^l |y(s)|\,ds \tag{2}$$

называется *площадью поверхности* S.

Пусть теперь кривая γ, заданная уравнениями (1), непрерывно дифференцируема, тогда она спрямляема, и $ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt$. Поэтому из (2) следует, что

$$\text{пл. } S = 2\pi \int_a^b |y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

В частности, если кривая γ — график неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\text{пл. } S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

В общем случае понятия поверхность и площадь поверхности являются достаточно сложными. Более подробно они будут изучаться в теории поверхностных интегралов.

§ 6. Криволинейные интегралы

6.1. Криволинейные интегралы первого рода. Пусть в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ задана спрямляемая кривая $\gamma = \breve{AB}$, и пусть s — переменная длина дуги этой кривой, отсчитываемая от точки A. В этом случае точка A называется *начальной*, а точка B — *конечной точкой кривой* γ. В дальнейшем будем различать кривые $\breve{AB}$ и $\breve{BA}$. Такие кривые называются *ориентированными*.

Очевидно, каждая точка M кривой $\gamma = \breve{AB}$ однозначно определяется заданием длины дуги AM. В этом смысле можно считать, что $s = |AM|$ является естественной координатой точки M на ориентированной кривой $\gamma = \breve{AB}$. Через M_s обозначим точку кривой γ, для которой $|\breve{AM_s}| = s$. Тогда задание функции $f(M)$, $M \in \gamma$, равносильно заданию числовой функции $f(M_s)$, $s \in [0; S]$, где S — длина кривой γ.

Определение. Пусть кривая $\gamma = AB$ спрямляема, $|\breve{AB}| = S$, а M_s — точка на γ, для которой $|AM_s| = s$. Тогда для любой функции $f(M)$, $M \in \gamma$, интеграл $\int\limits_0^S f(M_s)\,ds$ называется *криволинейным интегралом 1-го рода от функции f по кривой γ* и обозначается $\int\limits_\gamma f\,ds$ или $\int f\,d\gamma$.

Таким образом, по определению,

$$\int f\,d\gamma = \int\limits_0^S f(M_s)\,ds. \tag{1}$$

Заметим, что здесь функция f может быть как ограниченной, так и неограниченной, т.е. интеграл от f по ds может быть как собственным, так и несобственным.

Так как криволинейные интегралы первого рода — это обычные определенные интегралы, то они обладают всеми свойствами этих интегралов. Отметим лишь некоторые специфические *свойства криволинейных интегралов.*

1. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.*

Действительно, пусть s — переменная длина дуги кривой $\breve{AB}$, т.е. $s = |\breve{AM_s}|$, а σ — переменная длина дуги кривой $\breve{BA}$, т.е.

$\sigma = |\breve{BM'_\sigma}|$. Тогда, если $M_s = M'_\sigma$ то $s + \sigma = S$, где $S = |\breve{AB}|$, и поэтому

$$\int\limits_{\breve{AB}} f\,ds = \int\limits_0^S f(M_s)\,ds = \int\limits_0^S f(M_{S-\sigma})d\sigma = \int\limits_0^S f(M'_\sigma)d\sigma = \int\limits_{\breve{BA}} f\,d\sigma.$$

Если переменную длину дуги кривой $\breve{BA}$ снова обозначим через s, то получим равенство

$$\int\limits_{\breve{AB}} f\,ds = \int\limits_{\breve{BA}} f\,ds.$$

2. *Если $\gamma = \breve{AB}$ и $C \in \gamma$, то интеграл по γ равен сумме интегралов по $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$.*

Действительно, пусть s — переменная длина дуги кривой $\gamma = \breve{AB}$ и кривой $\gamma_1 = \breve{AC}$, а σ — переменная длина дуги кривой $\gamma_2 = \breve{CB}$. Тогда, если S_1 — длина кривой γ_1, то $\sigma = s - S_1$, и поэтому

$$\int f\,d\gamma = \int\limits_0^S f\,ds = \int\limits_0^{S_1} f\,ds + \int\limits_{S_1}^S f\,ds =$$

$$= \int f\,d\gamma_1 + \int\limits_0^{S-S_1} f\,d\sigma = \int f\,d\gamma_1 + \int f\,d\gamma_2.$$

В других обозначениях доказанное равенство имеет вид

$$\int\limits_{\breve{AB}} f\,ds = \int\limits_{\breve{AC}} f\,ds + \int\limits_{\breve{CB}} f\,ds.$$

3. *Криволинейный интеграл по замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки.*

Действительно, пусть γ — замкнутая кривая, и пусть A и B — две точки на этой кривой. Тогда $\gamma = \breve{ABA}$ и $\gamma = \breve{BAB}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\breve{ABA}} f\,ds = \int\limits_{\breve{AB}} f\,ds + \int\limits_{\breve{BA}} f\,ds = \int\limits_{\breve{BAB}} f\,ds.$$

4. *Если на гладкой кривой* $\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}$ *задана функция* f, *то*

$$\int f\,d\gamma = \int_a^b f(M_t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt, \tag{2}$$

где M_t *— точка с радиус-вектором* $\mathbf{r}(t)$.

Равенство (2) понимается в том смысле, что если один из интегралов существует, то существует и второй, и они равны.

Действительно, согласно определению,

$$\int f\,d\gamma = \int_0^S f\,ds,$$

где S — длина кривой γ. А так как $s = s(t)$, $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$, то

$$\int_0^S f\,ds = \int_a^b f(M_t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Причем из условия $|\mathbf{r}'(t)| > 0$ следует, что если один из интегралов существует, то существует и другой, и они равны.

Очевидно, формула (2) будет справедливой и для кусочно-гладкой кривой $\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}$. Например, если $c \in [a;b]$ и кривые $\gamma_1 = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le c\}$, $\gamma_2 = \{\mathbf{r}(t),\ c \le t \le b\}$ гладкие, то

$$\int f\,d\gamma = \int f\,d\gamma_1 + \int f\,d\gamma_2 =$$

$$= \int_a^c f(M_t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt + \int_c^b f(M_t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b f(M_t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Заметим, что здесь $\mathbf{r}'(t)$ в точке $t = c$ не определена.

Замечание. Если кривая γ непрерывно дифференцируема, а функция f непрерывна на γ, то, очевидно, оба интеграла в формуле (2) существуют и равны. Следовательно, для функции f, непрерывной на γ, формула (2) справедлива лишь при условии, что кривая γ непрерывно дифференцируема (она может иметь особые точки). Это же замечание справедливо и для ограниченной кусочно-непрерывной функции f.

На плоскости, т.е. в случае $n = 2$, формула (2) принимает вид

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt. \tag{3}$$

Если же кривая γ имеет явное задание $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\,ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx. \tag{4}$$

Пример 1. Выразим через определенные интегралы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\,ds,$$

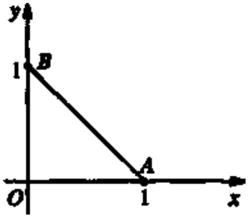

Рис. 7.4

где γ — контур треугольника с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ и $B(0;1)$ (рис. 7.4).

Кривая γ является суммой прямолинейных отрезков OA, AB и BO, и поэтому интеграл по γ равен сумме интегралов по этим отрезкам.

Отрезок OA имеет явное представление: $y = 0$, $x \in [0;1]$. Тогда по формуле (4) получаем:

$$\int\limits_{OA} f\,ds = \int\limits_{0}^{1} f(x,0)\,dx.$$

Отрезок BA имеет представление: $y = 1 - x$, $x \in [0;1]$. А так как интеграл 1-го рода не зависит от ориентации кривой, то

$$\int\limits_{AB} f\,ds = \int\limits_{BA} f\,ds = \int\limits_{0}^{1} f(x,1-x)\sqrt{2}\,dx.$$

Наконец, отрезок OB имеет представление: $x = 0$, $y \in [0;1]$, и поэтому

$$\int\limits_{BO} f\,ds = \int\limits_{OB} f\,ds = \int\limits_{0}^{1} f(0,y)\,dy.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\,ds = \int\limits_{0}^{1} \left(f(x,0) + \sqrt{2}f(x,1-x) + f(0,x)\right)dx.$$

Пример 2. Выразить через определенные интегралы криволинейный интеграл $\int f(x,y)\,d\gamma$, где γ — это кривая, заданная условиями $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

Очевидно, кривая γ имеет представление $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Поэтому по формуле (3) получаем:

$$\int f\,d\gamma = \int_0^\pi f(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi. \tag{5}$$

Во многих случаях кривую γ удобно рассматривать как кривую, имеющую явное задание $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1;1]$. В этом случае по формуле (4) имеем:

$$\int f\,d\gamma = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x, \sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

где справа получили несобственный интеграл. Он сходится, если функция $f(x,y)$ непрерывна, и сводится к интегралу (5) заменой $x = \cos\varphi$.

В дальнейшем для гладких кривых расширим класс допустимых представлений: к ним отнесем явные представления, которые имеют особенности в концевых точках. Например, функцию $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1;1]$, будем считать допустимым представлением гладкой кривой γ:

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad \varphi \in [0;\pi].$$

6.2. Криволинейные интегралы второго рода. Пусть спрямляемая кривая $\gamma = \breve{AB}$ в каждой точке $M \in \gamma$ имеет единичный касательный вектор $\mathbf{l} = \mathbf{l}(M)$, направленный в сторону возрастания дуги s. Как известно,

$$\mathbf{l}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}/\Delta s}{|\Delta\mathbf{r}/\Delta s|},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — представление кривой γ, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)$. В частности, если кривая γ гладкая, то

$$\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Определение 1. Для любой функции $f(M)$, $M \in \gamma$, интеграл $\int f l_i\,d\gamma$, где $l_i = l_i(M)$ — i-я координата единичного касательного вектора $\mathbf{l}(M)$, называется *криволинейным интегралом второго рода по кривой γ от функции f по dx_i* и обозначается $\int_\gamma f\,dx_i$.

Таким образом, по определению,

$$\int_\gamma f\,dx_i = \int_\gamma f l_i\,ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обычно полагают $l_i = \cos\alpha_i$, и тогда эта формула принимает вид

$$\int_\gamma f\,dx_i = \int_\gamma f \cos\alpha_i\,ds.$$

В частности, если кривая γ гладкая и $x_i = x_i(s)$ — i-я координата вектора $\mathbf{r}(s)$, то

$$\cos\alpha_i = \frac{dx_i}{ds}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и поэтому

$$\int_\gamma f\,dx_i = \int_\gamma f\frac{dx_i}{ds}\,ds = \int_0^S f\frac{dx_i}{ds}\,ds, \tag{1}$$

где S — длина кривой γ.

Очевидно, криволинейные интегралы второго рода обладают свойствами 2 и 3 криволинейных интегралов первого рода, т.е. интеграл по сумме кривых равен сумме интегралов по этим кривым, и интеграл по замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки. Однако они зависят от ориентации кривой и иначе выражаются через определенные интегралы. Сформулируем и докажем эти специфические свойства криволинейных интегралов второго рода.

1. *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой.*

Действительно, если $\mathbf{l}$ — единичный касательный вектор кривой $\breve{AB}$, то, очевидно, $-\mathbf{l}$ — единичный касательный вектор кривой $\breve{BA}$. Поэтому

$$\int_{\breve{AB}} f\,dx_i = \int_{\breve{AB}} f l_i\,ds = \int_{\breve{BA}} f l_i\,ds = -\int_{\breve{BA}} f\,dx_i.$$

2. *Если на гладкой кривой $\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \le t \le b\}$ задана функция f, то*

$$\int_\gamma f\,dx_i = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))x_i'(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где γ ориентирована параметром t.

Равенство (2) понимается в том смысле, что если один из интегралов существует, то существует и второй, и они равны.

Формула (2) получается из формулы (1) заменой $s = s(t)$ так как

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{dx_i}{dt}\,dt.$$

В частности, если плоская кривая γ имеет явное представление $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int_\gamma f\,dx = \int_a^b f(x, \varphi(x))\,dx, \tag{3}$$

$$\int_\gamma f\,dy = \int_a^b f(x, \varphi(x))\varphi'(x)\,dx. \tag{4}$$

Пример 1. Выразим через определенные интегралы криволинейные интегралы 2-го рода от функции $f(x, y)$ по контуру треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, и $B(0;1)$, ориентированному против часовой стрелки.

Кривая γ является суммой прямолинейных отрезков OA, AB и BO, поэтому интеграл по γ равен сумме интегралов по OA, AB и BO (см. пример 1 из п.6.1). По формуле (3) получаем:

$$\int_{OA} f\,dx = \int_0^1 f(x, 0)\,dx,$$

$$\int_{AB} f\,dx = -\int_{BA} f\,dx = -\int_0^1 f(x, 1-x)\,dx.$$

Наконец, отрезок OB имеет представление: $x = 0$, $y \in [0;1]$, поэтому, согласно формуле (4),

$$\int_{OB} f\,dx = \int_0^1 f(0, y)\cdot 0\,dy = 0.$$

Следовательно,

$$\int_\gamma f\,dx = \int_0^1 (f(x, 0) - f(x, 1-x))\,dx.$$

Аналогично,

$$\int_{OA} f\,dy = 0, \quad \int_{AB} f\,dy = \int_0^1 f(x, 1-x)\,dx, \quad \int_{OB} f\,dy = \int_0^1 f(0, y)\,dy.$$

Следовательно,

$$\int_\gamma f\,dy = \int_0^1 (f(x,1-x) - f(0,x))\,dx.$$

Определение 2. Пусть на кривой $\gamma = \breve{AB}$ задана векторная функция $\mathbf{a}(M)$, $M \in \gamma$. Тогда интеграл

$$\int_\gamma (\mathbf{a}, l)\,ds,$$

где $(\mathbf{a}, l)$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и l, называется *интегралом от вектора* $\mathbf{a}$ *по кривой* γ и обозначается $\int_\gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ или $\int \mathbf{a}\,d\gamma$.

Таким образом, по определению,

$$\int_\gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_\gamma \left(a, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) ds. \tag{5}$$

Физически этот интеграл можно интерпретировать как работу силы $\mathbf{a}$ вдоль пути $\gamma = \breve{AB}$.

Если кривая γ замкнутая, то интеграл (5) называется *циркуляцией вектора* $\mathbf{a}$ *по контуру* γ.

Для гладкой кривой γ, согласно определению,

$$\int_\gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_0^{S} \left(a, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) ds,$$

и поэтому если γ имеет представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, то имеет место формула

$$\int_\gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_a^b (\mathbf{a}, \mathbf{r}')\,dt. \tag{6}$$

В координатах ее записывают так:

$$\int_\gamma \sum_{i=1}^n a_i\,dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i x_i'\,dt.$$

В частности, если $n=2$ и вектор $\mathbf{a}$ имеет компоненты P и Q, то

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} (Px'(t) + Qy'(t))\,dt. \tag{7}$$

Пример 2. Найдем циркуляцию вектора с компонентами

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

по окружности γ радиуса R с центром в начале координат.

Через γ^+ обозначим окружность γ, ориентированную против часовой стрелки. Тогда γ^+ имеет представление:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

По формуле (7) получаем:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В дальнейшем будем рассматривать интегралы по кусочно-гладким кривым. По определению, *интеграл по кусочно-гладкой кривой* равен сумме интегралов от рассматриваемой функции по всем гладким кускам этой кривой. Очевидно, формулы (2), (6) и (7) справедливы и в этом случае.

Замечание. Криволинейные интегралы можно определить и как пределы соответствующих интегральных сумм. Не вдаваясь в тонкости, опишем этот подход к определению криволинейных интегралов.

Пусть $\tau = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$ — некоторое разбиение кривой γ, $|\gamma_j|$, — длина кривой γ_j. Тогда

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(M_j)|\gamma_j| = \int f(M)\,d\gamma,$$

где $M_j \in \gamma_j$, $|\tau| = \max\limits_j |\gamma_j|$.

Далее, через γ_j^i обозначим проекцию кривой γ_j, на ось x_i, а через $\Delta_i\gamma_j$ — длину γ_j^i со знаком $+$, если γ_j^i и ось x_i одинаково ориентированы, и со знаком $-$, если их ориентации противоположны. Тогда

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(M_j)\Delta_i\gamma_j = \int\limits_{\gamma} f(M)\,dx_i.$$

Для гладких и кусочно-гладких кривых эти определения равносильны исходным.

6.3. Потенциальные векторные поля. Напомним, что если на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задана векторная функция $\mathbf{a}(M)$, то говорят, что на G задано *векторное поле* $\mathbf{a}(M)$.

В дальнейшем будем считать, что G — это n-мерная область, т.е. открытое связное множество точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$, $M \in G$, называется *потенциальным в области* G, если существует скалярная функция $u(M)$, $M \in G$, такая, что

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M), \quad M \in G.$$

В этом случае функция $u(M)$ называется *потенциалом векторного поля* $\mathbf{a}(M)$.

Теорема 1. *Если непрерывное векторное поле* $\mathbf{a}(M)$, $M \in G$, *в области* G *имеет потенциал* $u(M)$, *то для любой кусочно-гладкой кривой* $\breve{AB} \subset G$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = u(B) - u(A). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть кривая $\breve{AB} \subset G$ гладкая, и пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, — ее представление. Тогда, если x_i — i-я координата точки M, а a_i — i-я координата вектора $\mathbf{a}$, то, согласно условию,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i \quad \forall i,$$

и поэтому

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_a^b (\mathbf{a}, \mathbf{r}')\, dt = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n a_i x_i'\, dt = \int\limits_a^b \frac{du}{dt}\, dt = u(B) - u(A).$$

Если же $\breve{AB}$ состоит, например, из двух гладких кусков $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\breve{AC}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{\breve{CB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) =$$
$$= u(C) - u(A) + u(B) - u(C) = u(B) - u(A).$$

Теорема 1 доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если непрерывное векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в области G имеет потенциал $u(M)$, то

$$u(M) = \int\limits_{\breve{AM}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + u(A), \quad M \in G, \tag{2}$$

где A — некоторая фиксированная точка области G, а $\breve{AM}$ — некоторая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки A и M и лежащая в G. (Напомним, что область является линейно связным множеством и, более того, любые ее две точки можно соединить ломаной, не выходя за пределы области.)

Следствие. *Разность любых двух потенциалов непрерывного векторного поля* $\mathbf{a}$ *в области* G *равна постоянной.*

Действительно, если $u(M)$ и $v(M)$ — два потенциала векторного поля $\mathbf{a}(M)$, $M \in G$, а A — некоторая фиксированная точка области G, то, согласно формуле (2),

$$u(M) - v(M) = u(A) - v(A) \quad \forall M \in G.$$

Теорема 2. *Если векторное поле* $\mathbf{a}(M)$ *определено и непрерывно в области* G, *то следующие три свойства равносильны.*

1. Циркуляция вектора $\mathbf{a}$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру $\gamma \subset G$ равна нулю.
2. Для любых двух точек A и B из G интеграл от $\mathbf{a}(M)$ по любой кусочно-гладкой кривой $\breve{AB} \subset G$ не зависит от пути интегрирования.
3. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в области G имеет потенциал.

Доказательство. Сначала докажем, что из свойства 1 следует свойство 2.

Пусть точки A и B соединены двумя кусочно-гладкими кривыми γ_1 и γ_2, лежащими в G. Кривые γ_1 и γ_2 образуют замкнутый кусочно-гладкий контур $A\gamma_1B\gamma_2A$ (рис. 7.5). Следовательно,

$$\int\limits_{A\gamma_1B} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) - \int\limits_{A\gamma_2B} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{A\gamma_1B\gamma_2A} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0,$$

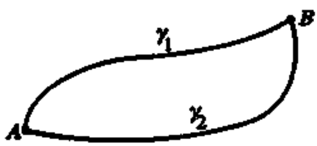

Рис. 7.5

что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что из свойства 2 следует свойство 3.

Пусть A — некоторая фиксированная точка области G, а M — переменная точка с координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \int\limits_{\breve{AM}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\breve{AM}$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, лежащая в G и соединяющая точки A и M. Отметим, что эта формула действительно задает функцию точки $M \in G$, так как точка A фиксирована, а интеграл не зависит от пути интегрирования.

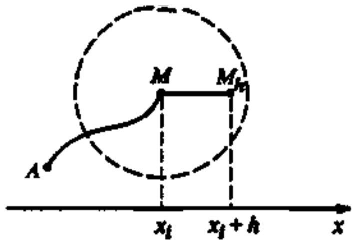

Рис. 7.6

Докажем, что функция $v(x)$, определенная формулой (3), является потенциалом векторного поля **a**.

Так как область G — открытое множество, то любая точка $M \in G$ содержится в G вместе с некоторой δ-окрестностью. Пусть M_h — точка с координатами $x + he_i = (x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)$, $h \neq 0$, причем такая, что $M_h \in O_\delta(M) \subset G$, и пусть $\Delta_i v = v(x + he_i) - v(x)$.

Очевидно, отрезок $\overline{MM_h}$, соединяющий точки M и M_h (рис. 7.6), лежит в $O_\delta(M)$ и

$$\Delta_i v = \int\limits_{\overline{MM_h}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Следовательно,

$$\Delta_i v = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} a_i(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)\, dt,$$

и поэтому

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_i v}{h} = a_i(x), \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = a_i(x).$$

Так как это равенство выполняется для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то этим доказано, что $\operatorname{grad} v = \mathbf{a}$.

В заключение докажем, что из свойства 3 следует свойство 1.

Пусть γ — некоторый кусочно-гладкий контур, лежащий в G, пусть A — некоторая точка на γ. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{A\gamma A} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = u(A) - u(A) = 0,$$

где $u(M)$ — потенциал векторного поля $\mathbf{a}(M)$. Теорема 2 доказана.

6.4. Условия интегрируемости векторного поля. Очевидно, если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(x)$ в области G имеет потенциал, то

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j. \tag{1}$$

Действительно, если $u(x)$ — потенциал этого векторного поля, то

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

А так как эти производные непрерывны, то они равны. Следовательно, условия (1) являются необходимыми для существования потенциала у непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}(x)$, $x \in G$. Их иногда называют *условиями интегрируемости векторного поля* $\mathbf{a}(x)$, $x \in G$.

Лемма. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\mathbf{a}(x)$ *в прямоугольном параллелепипеде* $\Pi = (a_1; b_1) \times \ldots \times (a_n; b_n)$ *удовлетворяет условиям интегрируемости* (1), *то это векторное поле в* Π *имеет потенциал.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $n = 3$. Пусть (x_1^0, x_2^0, x_3^0) — фиксированная точка, а $x = (x_1, x_2, x_3)$ — переменная точка параллелепипеда Π. Докажем, что функция

$$u(x) = \int_{x_1^0}^{x_1} a_1(t_1, x_2^0, x_3^0)\,dt_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} a_2(x_1, t_2, x_3^0)\,dt_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} a_3(x_1, x_2, t_3)\,dt_3,$$

определенная для любой точки $x \in \Pi$, является потенциалом векторного поля $\mathbf{a}(x)$.

Очевидно, $\partial u/\partial x_3 = a_3(x)$. Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2(x_1, x_2, x_3^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{x_3^0}^{x_3} a_3(x_1, x_2, t_3)\,dt_3 \tag{2}$$

В последнем слагаемом операцию дифференцирования можно подвести под знак интеграла, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{x_3^0}^{x_3} a_3(x_1, x_2, t_3)\,dt_3 = \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} a_3(x_1, x_2, t_3)\,dt_3. \tag{3}$$

Это утверждение легко следует из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному, которая будет доказана позже. Сейчас его примем без доказательства.

Из (2), (3) и условия $\partial a_3/\partial x_2 = \partial a_2/\partial x_3$ следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2(x_1, x_2, x_3^0) + \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial}{\partial t_3} a_2(x_1, x_2, t_3)\,dt_3 =$$
$$= a_2(x_1, x_2, x_3^0) + a_2(x_1, x_2, x_3) - a_2(x_1, x_2, x_3^0) = a_2(x).$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_1(x_1, x_2^0, x_3^0) + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} a_2(x_1, t_2, x_3^0)\, dt_2 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} a_3(x_1, x_2, t_3)\, dt_3 =$$

$$= a_1(x_1, x_2^0, x_3^0) + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t_2} a_1(x_1, t_2, x_3^0)\, dt_2 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial}{\partial t_3} a_1(x_1, x_2, t_3)\, dt_3 =$$

$$= a_1(x_1, x_2^0, x_3^0) + a_1(x_1, x_2, x_3^0) - a_1(x_1, x_2^0, x_3^0) +$$

$$+ a_1(x_1, x_2, x_3) - a_1(x_1, x_2, x_3^0) = a_1(x).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если векторное поле* $\mathbf{a}(x)$ *в области* G *непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет условиям интегрируемости* (1), *то оно является локально потенциальным, т.е. у каждой точки* $M_0 \in G$ *существует окрестность, в которой оно имеет потенциал.*

Следующий пример показывает, что векторное поле может быть локально потенциальным, но не иметь потенциала (глобального) в рассматриваемой области.

Пример. Векторное поле с координатами

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

определено и непрерывно дифференцируемо в любой точке (x, y) плоскости, кроме точки $(0, 0)$. Легко проверяется, что оно удовлетворяет условиям интегрируемости:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, оно локально потенциальное на всей плоскости, кроме точки $(0, 0)$. Однако в этой области у него не существует потенциала, так как циркуляция вектора $\mathbf{a}(P; Q)$ по единичной окружности с центром в начале координат отлична от нуля (см. пример 2 из п. 6.2).

6.5. Гомотопные пути и условия существования потенциала у векторного поля. Кривые γ_0 и γ_1 лежащие в области G и имеющие общее начало и общий конец, называются *гомотопными* или *гомотопными путями в области* G, если одну из них можно непрерывно деформировать в другую, не сдвигая ее концов и не выводя ее за пределы области G.

Теорема. *Если векторное поле* $\mathbf{a}(M)$ *в области* G *непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет условиям интегрируемости, то*

$$\int\limits_{A\gamma_0 B} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{A\gamma_1 B} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

для любых кусочно-гладких кривых $A\gamma_0 B$ *и* $A\gamma_1 B$, *гомотопных в области* G.

Доказательство. Прежде всего дадим точное определение понятия "кривые $A\gamma_0 B$ и $A\gamma_1 B$ гомотопны в области G".

Пусть кривые $A\gamma_0 B$ и $A\gamma_1 B$ имеют представления:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t), \quad a_0 \le t \le b_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t), \quad a_1 \le t \le b_1,$$

причем $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $a_0 = a_1 = 0$, $b_0 = b_1 = 1$. (Этого всегда можно добиться линейным преобразованием параметра кривой.)

Тогда кривые $A\gamma_0 B$ и $A\gamma_1 B$ называются *гомотопными в области* G, если существует непрерывная векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \alpha)$, $(t, \alpha) \in \Delta$, где $\Delta = [0; 1] \times [0; 1]$, такая что при любом $\alpha \in [0; 1]$ кривая

$$\gamma_\alpha = \{\mathbf{r}(t, \alpha), \quad t \in [0; 1]\}$$

лежит в G, имеет начало в точке A и конец в точке B, и, кроме того,

$$\mathbf{r}(t, 0) = \mathbf{r}_0(t), \quad \mathbf{r}(t, 1) = \mathbf{r}_1(t).$$

Через S обозначим множество точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ с радиусами-векторами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \alpha)$, $(t, \alpha) \in \Delta$.

Так как множество S является компактом и содержится в области G, то расстояние от S до границы области G больше некоторого $d > 0$. Поэтому для любой точки $M_0 \in S$ n-мерный куб $Q(M_0; d)$ с центром в точке M_0, у которого ребра параллельны осям координат и длина половины ребра равна $d/\sqrt{n}$, содержится в области G.

Функция $\mathbf{r}(t, \alpha)$ непрерывна на замкнутом квадрате Δ, поэтому любая ее координата $x_i(t, \alpha)$ равномерно непрерывна на Δ. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $(t_0, \alpha_0) \in \Delta$ выполняется условие: для любой точки $(t, \alpha) \in \Delta$, удовлетворяющей неравенствам

$$|t - t_0| < \delta, \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta, \tag{1}$$

справедливы неравенства

$$|x_i(t, \alpha) - x_i(t_0, \alpha_0)| < \frac{d}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это означает, что для любой точки $M_0 \in S$ с координатами $x_i(t_0, \alpha_0)$ множество всех точек $M \in S$, удовлетворяющих условиям (1), принадлежат кубу $Q(M_0; d)$. Заметим, что здесь δ не зависит от точки M_0.

Каждую сторону квадрата Δ точками

$$t_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$
$$\alpha_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

разобьем на $N > 1/\delta$ равных отрезков и через эти точки в плоскости (t, α) проведем прямые параллельно осям координат. Тогда квадрат Δ будет разбит на N^2 квадратов

$$\Delta_{ij} = [t_i; t_{i+1}] \times [\alpha_j; \alpha_{j+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1$$

со стороной $1/N < \delta$.

Легко видеть, что множество

$$S_{ij} = \{\mathbf{r}(t, \alpha), \ (t, \alpha) \in \Delta_{ij}\}$$

лежит в кубе $Q(M_j^i; d)$, где M_j^i — точка с радиус-вектором $\mathbf{r}(t_i, \alpha_j)$. В частности, для любых $i < N$ и $j < N$ четыре точки M_j^i, M_j^{i+1}, M_{j+1}^{i+1}, M_{j+1}^i лежат в кубе $Q(M_j^i; d)$, и поэтому циркуляция вектора $\mathbf{a}$ по замкнутой ломаной с вершинами в этих точках равна нулю, так как в $Q(M_j^i; d)$ векторное поле $\mathbf{a}$ имеет потенциал.

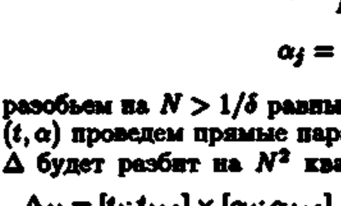

Рис. 7.7

Через l_j обозначим ломаную с вершинами в точках $M_j^0, M_j^1, \ldots, \ldots, M_j^N$ и рассмотрим две соседние ломаные l_j и l_{j+1} (рис. 7.7).

Так как точки $A = M_j^0 = M_{j+1}^0$, M_j^1 и M_{j+1}^1 лежат в кубе, где есть потенциал, то

$$\int\limits_{AM_j^1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{AM_{j+1}^1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{M_{j+1}^1 M_j^1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Аналогично,

$$\int\limits_{M_j^1 M_j^2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{M_j^1 M_{j+1}^1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{M_{j+1}^2 M_j^2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{AM_j^1 M_j^2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{AM_{j+1}^1 M_{j+1}^2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{M_{j+1}^2 M_j^2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

так как сумма интегралов по $M^1_{j+1}M^1_j$ и по $M^1_jM^1_{j+1}$ равна нулю. Поступая так и далее, в результате получим:

$$\int\limits_{l_j}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{l_{j+1}}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Покажем, что

$$\int\limits_{l_0}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\gamma_0}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \tag{3}$$

По построению вершины $M^0_0, M^1_0, \ldots, M^N_0$ ломаной l_0 лежат на кривой γ_0. Через γ^i_0 обозначим часть кривой γ_0 от точки M_0 до точки M^{i+1}_0. Кривая γ^i_0 лежит в кубе, где у векторного поля $\mathbf{a}(x)$ существует потенциал, поэтому

$$\int\limits_{\gamma^i_0}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{M^i_0M^{i+1}_0}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}), i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

что и доказывает равенство (3). Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{l_N}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\gamma_1}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \tag{4}$$

Теперь из (2), (3) и (4) следует равенство

$$\int\limits_{\gamma_0}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\gamma_1}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Теорема доказана.

Определение. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *односвязной*, если любые две кусочно-гладкие кривые, принадлежащие области G и имеющие общее начало и общий конец, гомотопны в области G.

Следствие. *Если векторное поле в односвязной области непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет условиям интегрируемости, то оно в этой области имеет потенциал.*

Как показывает пример, рассмотренный в п.6.4, здесь условие односвязности области является существенным. Там было рассмотрено векторное поле, которое определено на всей плоскости, кроме точки $(0,0)$. Оно во всей области определения удовлетворяло условиям интегрируемости, но в этой области не имело потенциала.

Примерами односвязных областей на плоскости являются круг, прямоугольник. Внешность круга, или прямоугольника, уже не будет односвязной областью. В пространстве шар, параллелепипед — односвязные области. Внешность шара — тоже односвязная область. Все пространство без некоторой прямой уже не будет односвязной областью.

Пример 1. Вычислим циркуляцию вектора a с координатами

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

по контуру γ, который охватывает начало координат и ориентирован против часовой стрелки (рис. 7.8).

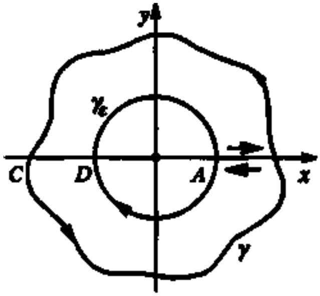

Рис. 7.8

Данное векторное поле является потенциальным в плоскости с разрезом вдоль положительного луча оси Ox. Через γ_ε обозначим окружность радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в начале координат.

Тогда циркуляция вектора a по контуру, составленному из кривой γ от точки B до точки B, отрезка BA, окружности γ_ε, ориентированной по часовой стрелке, и отрезка AB, равна нулю. А так как сумма интегралов по BA и AB равна нулю, то

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy,$$

где γ_ε ориентирована против часовой стрелки. Как показано в примере 2 из п.6.2, последний интеграл равен 2π, поэтому и циркуляция вектора a по контуру γ равна 2π.

Пример 2. Вычислим криволинейный интеграл от вектора a (см. пример 1) по кривой γ, изображенной на рис. 7.9, от точки $A(2;0)$ до точки $B(1;0)$. В примере 1 показано, что по контуру, составленному из кривой γ и отрезка BA, он равен 2π.

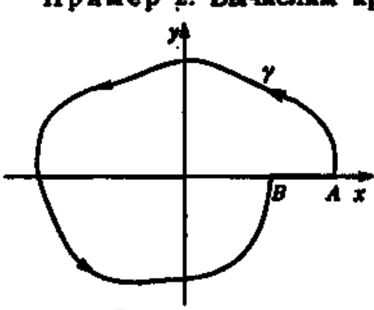

Рис. 7.9

Следовательно,

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy = 2\pi - \int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy = 2\pi,$$

так как интеграл по BA равен нулю.

§ 7. Интегрирование функций комплексного переменного

7.1. Определение и основные свойства интегралов. Пусть на плоскости заданы непрерывная кривая γ и на γ комплекснозначная функция f. Если кривая γ имеет представление $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a; b]$, то будем говорить, что на комплексной плоскости кривая γ задана уравнением $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$, и что на γ задана функция $f(z)$, $z \in \gamma$.

Определение. Для любой функции f, определенной на гладкой кривой γ, заданной уравнением $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, комплексное число, равное $\int\limits_a^b f(z)z'(t)\,dt$, называется *интегралом от функции $f(z)$ по кривой* γ и обозначается $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$. (Здесь кривая γ ориентирована параметром t.)

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z)z'(t)\,dt. \tag{1}$$

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z}$, где C_ρ — окружность радиуса ρ с центром в точке $z = 0$, причем C_ρ обходится против часовой стрелки.

Очевидно, окружность C_ρ задается уравнением $z = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi \in \in [0; 2\pi]$. Поэтому

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Если же γ_ρ — дуга окружности C_ρ, равная α радиан, то

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z} = \alpha i.$$

Из формулы (1) следует, что если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_a^b (u + iv)(x' + iy')\,dt = \int\limits_a^b (ux' - vy')\,dt + i\int\limits_a^b (vx' + uy')\,dt =$$
$$= \int\limits_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int\limits_\gamma v\,dx + u\,dy.$$

Таким образом,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy, \tag{2}$$

и поэтому существование интеграла от $f(z)$ по кривой γ равносильно существованию двух криволинейных интегралов от действительных функций.

Из формулы (2) следует, что определение (1) корректно в том смысле, что интеграл от $f(z)$ по γ не зависит от параметризации кривой γ. Из свойств криволинейных интегралов вытекает, что *при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак*. Кроме того, имеют место *свойство линейности*, т.е.

$$\int_\gamma (af(z) + bg(z))\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma g(z)\,dz,$$

где a и b — комплексные числа, и *свойство аддитивности*, т.е. если кривая γ некоторой точки разбита на две кривые γ_1 и γ_2, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz.$$

Для кусочно-гладкой кривой, по определению, интеграл от $f(z)$ по γ равен сумме интегралов от $f(z)$ по всем гладким кускам кривой γ.

В дальнейшем будем рассматривать только кусочно-гладкие кривые.

Лемма. *Если функция $f(z)$ интегрируема на кривой γ, то функция $|f(z)|$ тоже интегрируема на γ и справедливо неравенство*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| < \int_\gamma |f(z)|\,dz \le \|f\|\cdot|\gamma|, \tag{3}$$

где $\|f\| = \sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, а $|\gamma|$ — длина кривой γ.

Доказательство. Интегрируемость функции $|f(z)|$ была доказана при рассмотрении интегралов от векторных функций. Там же было доказано, что

$$\left|\int_a^b f(z)z'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(z)z'(t)|\,dt,$$

а так как $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$, то

$$\int_a^b |f(z)|\cdot|z'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,ds.$$

Отсюда и из формулы (1) вытекают неравенства (3). Лемма доказана.

Пример 2. Докажем, что

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{e^z-1}{z}\,dz=0,$$

где γ_ρ — дуга окружности C_ρ радиуса ρ с центром в точке $z=0$.

Действительно, так как $\lim\limits_{z\to 0}\left|\frac{e^z-1}{z}\right|=1$, то

$$\exists\delta>0:\ \forall\rho<\delta\quad \frac{e^z-1}{z}<2,$$

где $\rho=|z|$, и поэтому для любого $\rho<\delta$

$$\left|\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{e^z-1}{z}\,dz\right|\le 2\cdot 2\pi r,$$

что и доказывает наше утверждение.

Из формулы (1) следует, что если непрерывная функция $f(z)$ в области G имеет первообразную $F(z)$, то для интеграла от $f(z)$ по любой гладкой кривой $\gamma\subset G$ от точки z_1 до точки z_2 справедлива *формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2}f(z)\,dz=F(z_2)-F(z_1). \tag{4}$$

Например,

$$\int\limits_{z_1}^{z_2}z^n\,dz=\frac{1}{n+1}\left(z_2^{n+1}-z_1^{n+1}\right)$$

для любого $n=0,1,2,\ldots$

$$\int\limits_{z_1}^{z_2}e^z\,dz=e^{z_2}-e^{z_1}.$$

Здесь интегралы берутся от точки z_1 до точки z_2 по любой гладкой или кусочно-гладкой кривой γ.

Таким образом, если непрерывная функция $f(z)$ в области G имеет первообразную, то интеграл от f не зависит от пути интегрирования.

Из формулы (2) следует, что если функция $f(z)$ непрерывна в области G и интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, то функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad z \in G,$$

где $z_0 \in G$, дифференцируема в G и $F'(z) = f(z)$. Действительно, если $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, то

$$U(x,y) = \int_{z_0}^{z} u\,dx - v\,dy, \qquad V(x,y) = \int_{z_0}^{z} v\,dx + u\,dy,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = u.$$

Следовательно, функция $F(z)$ дифференцируема в G (так как удовлетворяет условиям Коши–Римана) и $F'(z) = f(z)$ т.е. функция $F(z)$ является первообразной для функции $f(z)$.

7.2. Интегральная теорема Коши. Непосредственным следствием свойств криволинейных интегралов является следующая теорема, которая называется *интегральной теоремой Коши.*

Теорема. *Если функция $f(z)$ в области G имеет непрерывную производную, а кусочно-гладкие кривые γ_1 и γ_2 гомотопны в G, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в области G имеет непрерывную производную, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в G непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия — это условия интегрируемости векторных полей (v,u) и $(u,-v)$, поэтому, в силу теоремы из п.6.5,

$$\int_{\gamma_1} u\,dx - v\,dy = \int_{\gamma_2} u\,dx - v\,dy,$$

$$\int_{\gamma_1} v\,dx + u\,dy = \int_{\gamma_2} v\,dx + u\,dy.$$

Отсюда и из того, что интеграл от $f(z)$ выражается через эти криволинейные интегралы (см. п.7.1), следует равенство (1).

Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(z)$ в односвязной области G имеет непрерывную производную, то интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset G$ равен нулю.*

Из теоремы следует, что для непрерывно дифференцируемой функции $f(z)$ в односвязной области G интеграл не зависит от пути интегрирования $\gamma \subset G$, а зависит только от начальной и конечной точек кривой γ.

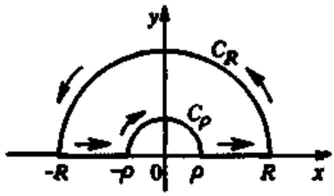

Рис. 7.10

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Пусть $\gamma_{\rho,R}$ — контур, изображенный на рис. 7.10. Он состоит из полуокружности C_R, отрезка $[-R; -\rho]$, полуокружности C_ρ и отрезка $[\rho; R]$. Очевидно,

$$\int\limits_{\gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

где обход кривых C_ρ и C_R совершается против часовой стрелки. Таким образом,

$$2i\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

Из примеров, рассмотренных в п.7.1, следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i.$$

Следовательно,

$$2i\int\limits_{0}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi i - \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $R \to +\infty$. Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le \int\limits_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi,$$

а так как $\sin\varphi \ge 2\varphi/\pi$ для $\varphi \in [0; \pi/2]$, то

$$2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi \le 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-2R\varphi/\pi}\,d\varphi = \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \to 0$$

при $R \to +\infty$. Таким образом, $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

7.3. Интегральная формула Коши. Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой кривой*. Кривая, у которой начало и конец совпадают, называется *замкнутой кривой*.

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ в некоторой области G (не обязательно односвязной) имеет непрерывную производную. Тогда, если простые замкнутые кривые $\gamma_1 \subset G$ и $\gamma_2 \subset G$ не пересекаются и образуют границу ограниченной области $g \subset G$, то*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

где обход кривых γ_1 и γ_2 совершается в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке).

Доказательство. Соединим кривую γ_1 с кривой γ_2 кусочно-гладкой кривой γ_0, не выходя из области g. Пусть A и B — концы кривой γ_0, причем $A \in \gamma_1$, $B \in \gamma_2$ (рис. 7.11).

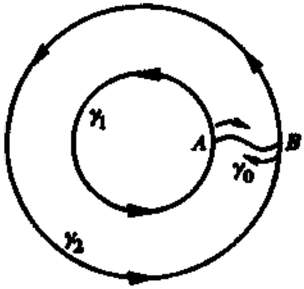

Рис. 7.11

Тогда кривые $A\gamma_1 A$ и $A\gamma_0 B\gamma_2 B\gamma_0 A$ гомотопны в области G, и поэтому интегралы по ним от $f(z)$ равны. Осталось заметить, что интеграл по $A\gamma_0 B\gamma_2 B\gamma_0 A$ равен интегралу по $B\gamma_2 B$. Лемма доказана.

Пусть простая замкнутая кривая γ является границей области G. Тогда говорят, что кривая γ *ориентирована положительно* относительно области G, если при обходе γ согласно ориентации область G остается слева.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в односвязной области D_f, и пусть γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в D_f. Тогда, если G_γ — ограниченная область с границей γ, и γ ориентирована в положительном направлении относительно G_γ, то*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \forall z \in G_\gamma. \tag{1}$$

Формула (1) называется *интегральной формулой Коши.*

Доказательство. При фиксированном $z \in G_\gamma$ функция $f(\zeta)/(\zeta - z)$ дифференцируема по ζ в любой точке $\zeta \in D_f$, кроме $\zeta = z$. Так как множество G_γ открытое, то существует $\delta > 0$ такое, что $O_\delta(z) \subset G_\gamma$. Через C_ρ обозначим окружность радиуса $\rho < \delta$ с центром в точке z. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(z) + f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta =$$

$$= f(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{\partial\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Окружность C_ρ задана уравнением $\zeta = z + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it}}{\rho r^{it}}\,dt = 1.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Отсюда, в частности, следует, что последний интеграл не зависит от ρ. Покажем, что он равен нулю.

Так как функция $f(\zeta)$ в точке z имеет производную, то

$$\exists\delta,\ M > 0: \quad |f(\zeta - f(z)| \le M|\zeta - z|$$

для любого $\zeta \in \overset{\circ}{O}_\delta(z)$. Поэтому, если $\rho < \delta$, то

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \le M\rho$$

а это и означает, что рассматриваемый интеграл равен нулю. Теорема доказана.

Глава 8. Числовые ряды

§ 1. Ряды с комплексными членами

1.1. Основные определения и необходимое условие сходимости. В этом параграфе обобщим понятие суммы на случай бесконечного числа слагаемых и изучим свойства таких бесконечных сумм. А так как многие их свойства справедливы как для действительных чисел, так и для комплексных, то все основные определения сформулируем в множестве комплексных чисел.

Определение 1. Для любой заданной последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ выражение вида

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} z_k \tag{1}$$

называется *числовым рядом с общим (n-м) членом* z_n (или z_k). Сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

называется *n-й частичной суммой ряда* (1), а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \text{где} \quad u_k = z_{n+k},$$

называется *n-м остатком ряда* (1) и обозначается

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k \quad \text{или} \quad z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots$$

Определение 2. Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Определение 3. Предел последовательности частичных сумм ряда называется *суммой* этого ряда.

Таким образом, если s — сумма ряда (1), то, согласно определению,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

В этом случае пишут

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Следовательно, вопрос о сходимости ряда равносилен вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, любая последовательность $\{z_n\}$ является последовательностью частичных сумм ряда

$$z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots ,$$

и поэтому ее изучение может быть сведено к изучению этого ряда. Это означает, что рассмотрение рядов есть просто новая форма изучения последовательностей. Однако ряды во многих случаях более удобны как при доказательстве существования предела, так и при его вычислении.

Пример 1. Числовой ряд с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится и его сумма равна 1.

Действительно, $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Пример 2. Числовой ряд с общим членом $a_n = 1/n^2$ сходится.

Действительно, последовательность его частичных сумм s_n монотонно возрастает и ограничена сверху, так как

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} < 2$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пример 3. Числовой ряд с общим членом $a_n = 1/\sqrt{n}$ расходится. Его сумма равна $+\infty$.

Действительно,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n},$$

и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Для рядов имеет место следующее достаточно простое *необходимое условие сходимости*.

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Ряд (1) сходится, т.е. последовательность его частичных сумм s_n имеет конечный предел. Поэтому из очевидного равенства

$$z_n = s_n - s_{n-1},$$

справедливого для любого $n \geq 2$, следует, что $z_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Пример 3 показывает, что условие (2) не является достаточным условием сходимости ряда.

Пример 4. Рассмотрим числовой ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots, \tag{3}$$

т.е. ряд с общим членом $z_n = q^{n-1}$, где q — некоторое заданное число (действительное или комплексное).

Известно, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{4}$$

для любого $q \neq 1$. Если же $q = 1$, то $s_n = n$. Из формулы (4) следует, что если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Следовательно, если $|q| < 1$, то ряд (3) сходится, и его сумма равна $1/(1 - q)$.

Для любого q, у которого $|q| \geq 1$, ряд (3) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости. В частности, если $q = 1$, то сумма ряда (3) равна $+\infty$, а если $q = -1$, то он не имеет суммы (ни конечной, ни бесконечной).

Заметим, что любую сумму конечного числа слагаемых можно рассматривать как ряд, добавив к ней члены, равные нулю. Очевидно, сумма этого ряда совпадает с заданной суммой.

1.2. Свойства сходящихся рядов. Сформулируем и докажем несколько общих свойств сходящихся рядов, являющихся непосредственными следствиями соответствующих свойств сходящихся последовательностей.

Теорема 1. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится; обратно, если сходится некоторый остаток ряда, то и ряд сходится.*

Кроме того, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, то для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{p} z_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} z_k,$$

Доказательство. Пусть p-й остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, и его сумма равна r_p. Тогда для любого $n > p$ справедливо равенство

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = s_p + \sum_{k=p+1}^{n} z_k,$$

из которого следует, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s_p + r_p,$$

т.е. данный ряд сходится, и его сумма равна $s_p + r_p$.

Обратно, пусть данный ряд сходится, и его сумма равна s. Тогда для любого $n > p$ справедливо равенство

$$\sum_{k=p+1}^{n} z_k = s_n - s_p,$$

из которого следует, что p-й остаток ряда сходится, и его сумма равна $s - s_p$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$, где c — некоторое число, тоже сходятся, и*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{2}$$

Действительно, если a и b — суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, то из соответствующих теорем о пределах последовательностей следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = ca.$$

Эта теорема означает, что сходящиеся ряды "можно складывать почленно" и что "общий множитель можно выносить за скобку". "Можно" в том смысле, что выполняются равенства (1) и (2).

Теорема 3. *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon \tag{3}$$

Действительно, условие (3), называемое *условием Коши для ряда*, — это условие Коши для последовательности $\{s_n\}$ его частичных сумм, так как

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k = s_{n+p} - s_n.$$

Заметим, что из условия (3) при $p = 1$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

§ 2. Ряды с неотрицательными членами

2.1. Признаки сравнения. В этом параграфе будем рассматривать числовые ряды с действительными неотрицательными членами. У любого такого ряда последовательность частичных сумм является монотонно возрастающей. Она всегда имеет предел, причем, если она ограничена, то ее предел конечный, в противном случае он равен $+\infty$. Таким образом, любой ряд с неотрицательными членами имеет сумму, конечную или равную $+\infty$, и для таких рядов имеет место следующий критерий сходимости:

Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Заметим, это утверждение по форме напоминает критерий сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций. Как и для несобственных интегралов, для рядов с неотрицательными членами имеет место следующий *признак сравнения*.

Теорема 1. *Пусть* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *и* $a_n = O(b_n)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *тоже сходится. Если же ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Доказательство. Условие $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$ для неотрицательных a_n и b_n означает, что

$$\exists C > 0, \quad \exists p : \quad \forall n \geq p \quad a_n \leq C b_n.$$

Следовательно,

$$\forall n \geq p \quad \sum_{k=p}^{n} a_k \leq C \sum_{k=p}^{n} b_k.$$

Отсюда и из критерия сходимости ряда с неотрицательными членами следует, что если ряд из b_k сходится, то ряд из a_k тоже сходится. Если же ряд из a_k расходится, то и ряд из b_k расходится. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *и* a_n *и* b_n *одного порядка при* $n \to \infty$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Действительно, условие "a_n и b_n одного порядка при $n \to \infty$" означает, что $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если* $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *и существует* N *такое, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq N,$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (*и, соответственно, из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$).

Доказательство. В этом случае

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \frac{b_{N+1}}{b_N}, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

где $n > N$. Перемножив эти неравенства, получим :

$$\frac{a_n}{a_N} \leq \frac{b_n}{b_N}, \quad \text{т.е.} \quad a_n \leq \frac{a_N}{b_N} b_n,$$

для любого $n > N$. Отсюда следует, что $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$, т.е. выполняются условия теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Все доказанные выше утверждения называются *признаками сравнения*: в них один ряд сравнивается с другим.

Пример 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Так как

$$0 \leq \frac{\sin^2 nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится (см. пример 2 из п.1.1), то по теореме 1 данный ряд тоже сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ и сравним его с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Так как

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

при $n \to \infty$, то эти ряды, согласно следствию, расходятся или сходятся одновременно.

Из равенства

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

следует, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) \to +\infty$$

при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд тоже расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд с общим членом

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Этот ряд сходится, так как, согласно формуле Тейлора,

$$a_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

при $n \to \infty$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится.

Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Обозначив через C сумму данного ряда, получим замечательную формулу

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + o(1) \qquad (1)$$

при $n \to \infty$. В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Постоянная C в формуле (1) называется *эйлеровой постоянной*: $C = 0,577\ldots$

Пример 4. Ряд с общим членом $a_n = \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 2$, сходится при любом $\alpha > 0$, и его сумма равна 1, так как

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

По теореме Лагранжа о среднем получаем: существует $\theta \in (0;1)$ такое, что

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha} = \frac{-\alpha}{(n-1+\theta)^{\alpha+1}}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{\alpha}{(n-1+\theta)^{\alpha_1}} > \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha+1}$ сходится при любом $\alpha > 0$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Последнее утверждение следует из того, что $1/n^\alpha \geq 1/n$ при $\alpha \leq 1$, а гармонический ряд расходится.

2.2. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Признаки Коши и Даламбера являются непосредственными следствиями признаков сравнения (см. теоремы 1 и 2 из п.2.1): в них ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с неотрицательными членами сравнивается с геометрической прогрессией.

Теорема 1. *Если существует N такое, что*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq N, \tag{2}$$

где $0 < q < 1$, то ряд (1) *сходится. Если же*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq N, \tag{3}$$

то ряд (1) *расходится.*

Доказательство. Из условия (2) следует, что

$$a_n \le q^n \quad \forall n \ge N,$$

и поэтому ряд (1) сходится, так как геометрическая прогрессия с общим членом $b_n = q^n$, $0 < q < 1$, сходится. Если же выполняется условие (3), то

$$a_n \ge 1 \quad \forall n \ge N,$$

и поэтому ряд (1) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть ряд* (1) *такой, что* $a_n \ge 0\ \forall n$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C \tag{4}$$

Тогда, если $C < 1$, *то ряд сходится, а если* $C > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть $0 \le C < 1$. Выберем некоторое $q \in (C; 1)$. Тогда для этого q из (4) следует условие (2), и поэтому ряд (1) сходится. Если же $C > 1$, то выполняется условие (3), и поэтому ряд (1) расходится. Следствие 1 доказано.

Теорема 1 называется *признаком Коши*, а следствие 1 — *признаком Коши в предельной форме.*

Теорема 2. *Если существует* N *такое, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \quad \forall n \ge N, \tag{5}$$

где $0 < q < 1$, *то ряд* (1) *сходится. Если же*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad \forall n \ge N, \tag{6}$$

то ряд (1) *расходится.*

Доказательство. Из условия (5) следует, что для $n > N$ выполняются неравенства

$$a_n \le q a_{n-1} \le \ldots \le a_N q^{n-N} = \frac{a_N}{q^N} \cdot q^n.$$

А так как геометрическая прогрессия с общим членом $b_n = a_N / q^N \cdot q^n$, $0 < q < 1$, сходится, то и ряд (1) сходится. Если же выполняется условие (6), то

$$a_n \ge a_{n-1} \ge \ldots \ge a_N > 0 \quad \forall n > N,$$

и поэтому ряд (1) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть ряд* (1) *такой, что* $a_n > 0\ \forall n$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D. \tag{7}$$

Тогда, если $D < 1$, *то ряд сходится, а если* $D > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть $0 \le D < 1$. Выберем некоторое $q \in (D; 1)$. Тогда для этого q из (7) следует условие (5), и поэтому ряд (1) сходится. Если же $D > 1$, то выполняется условие (6), и поэтому ряд (1) расходится. Следствие 2 доказано.

Теорема 2 называется *признаком Даламбера*, а следствие 2 — *признаком Даламбера в предельной форме.*

Заметим, что если в условии (4) $C = 1$, то, как показывают примеры (см. примеры 1–3 из п.1.1), о сходимости ряда ничего определенного сказать нельзя: он может как сходиться, так и расходиться. Аналогичное замечание справедливо и в случае, когда $D = 1$.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n}\right)^n$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

и поэтому, согласно признаку Коши, данный ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

Пример 2. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ применим признак Коши

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится, если $|x| < \sqrt{2}$, и расходится, если $|x| \ge \sqrt{2}$.

Пример 3. По признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится при любом $x > 0$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

В заключение докажем одно обобщение признака Коши в предельной форме. Оно будет полезным при изучении степенных рядов.

Теорема 3. *Пусть ряд* (1) *такой, что* $a_n \ge 0\ \forall n$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = C.$$

Тогда, если $C < 1$, *то ряд сходится, а если* $C > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть $0 \le C < 1$. Выберем некоторое $q \in \in (C;1)$. Тогда из определения верхнего предела (как наибольшего частичного предела) следует, что

$$\exists N: \quad \forall n \ge N \quad \sqrt[n]{a_n} < q, \quad a_n < q^n,$$

и поэтому данный ряд сходится. Если же $C > 1$, то существует подпоследовательность a_{n_k} такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = C,$$

и поэтому

$$\exists K: \quad \forall k \ge K \quad a_{n_k} > 1.$$

Следовательно, в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости. Теорема 3 доказана.

2.3. Признак Раабе. В признаках Коши и Даламбера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \tag{1}$$

сравнивается с геометрической прогрессией. В тех случаях, когда эти признаки не дают ответа, приходится использовать более сложные признаки, в которых ряд (1) сравнивается с рядами, сходящимися или расходящимися "медленнее", чем прогрессия. Здесь рассмотрим *признак Раабе*, в котором ряд (1) сравнивается с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{2}$$

Теорема. *Если существует N такое, что*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ge r \quad \forall n \ge N, \tag{3}$$

где $r > 1$, то ряд (1) сходится. Если же

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1 \quad \forall n \ge N, \tag{4}$$

то ряд (1) расходится.

Доказательство. Из условия (3) следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \ge 1 + \frac{r}{n} \quad \forall n \ge N,$$

где $r > 1$. Выберем некоторое $\alpha \in (1;r)$. Для этого α существует N_α такое, что

$$1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \quad \forall n \ge N_\alpha,$$

так как

$$1+\frac{r}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\frac{r-\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n\to\infty$. Следовательно, для любого $n\geq\max\{N,N_\alpha\}$ справедливо неравенство

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha},$$

т.е.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1/(n+1)^{\alpha}}{1/n^{\alpha}}.$$

Так как ряд (2) при $\alpha>1$ сходится, то по теореме 2 из п.2.1 ряд (1) тоже сходится.

Если же выполняется условие (4), т.е.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\quad\forall n\geq N,$$

то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{1/(n+1)}{1/n}\quad\forall n\geq N.$$

А так как ряд (2) при $\alpha=1$ расходится, то по теореме 2 из п.2.1 ряд (1) тоже расходится. Теорема доказана.

Признак Раабе, как и признаки Коши и Даламбера, обычно применяется в *предельной форме.*

Следствие. *Пусть ряд* (1) *такой, что* $a_n>0\ \forall n$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=R.$$

Тогда, если $R>1$, *то ряд сходится, а если* $R<1$, *то ряд расходится.*

Оно доказывается так же, как и следствия 1 и 2 в предыдущем пункте. Предлагается доказать в качестве упражнения.

Очевидно, если предел

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

существует и $D\neq 1$, то $R=+\infty$ при $D<1$ и $R=-\infty$ при $D>1$. Следовательно, если признак Даламбера дает ответ на вопрос о сходимости ряда, то признак Раабе тоже его дает, причем все такие случаи имеют место при $R=\pm\infty$. В этом смысле признак Раабе значительно сильнее признака Даламбера.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)\ldots(x+n)}$, где $x > 0$.

По признаку Даламбера получаем :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{x+n+1} = 1 \quad \forall x.$$

Следовательно, здесь признак Даламбера неприменим. Применим признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+1} = x.$$

Таким образом, если $x > 1$, то ряд сходится, а если $x < 1$, то ряд расходится; при $x = 1$ он тоже расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Для него

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - 1\right) = n\left(e \cdot e^{-n\ln(1+1/n)} - 1\right) =$$

$$= n\left(e \cdot e^{-n\left(1/n - 1/2n^2 + o(1/n^2)\right)} - 1\right) = n\left(e^{1/2n + o(1/n)} - 1\right) =$$

$$= n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

2.4. Ряды с монотонными членами. Во многих случаях, встречающихся в приложениях, члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \tag{1}$$

монотонно убывают, т.е. $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Для таких рядов справедлива следующая интересная *теорема Коши*.

Теорема 1. *Если члены ряда* (1) *неотрицательны и монотонно убывают, то он сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots \tag{2}$$

Доказательство. Пусть s_n — n-я частичная сумма ряда (1), а t_n — n-я частичная сумма ряда (2). Тогда

$$s_n \leq s_{2^n} = a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^n - 1}) + a_{2^n} \leq$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} = t_n$$

т.е. $s_n \le t_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому если ряд (2) сходится, то ряд (1) тоже сходится. С другой стороны,

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}t_n,$$

т.е. $t_n \le 2s_{2^n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, если ряд (1) сходится, то сходится и ряд (2). Теорема 1 доказана.

Заметим, что в этой теореме ряд (2) можно заменить более общим рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k a_{p^k},$$

где p — любое натуральное число, отличное от 1. Удивление вызывает то, что довольно "редкая" подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$ определяет сходимость или расходимость ряда (1).

Например, поведение ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$, совпадает с поведением ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot 1/2^{k\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Далее, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

В заключение докажем еще один признак сходимости ряда с неотрицательными монотонными членами, в котором ряд сравнивается с несобственным интегралом. Он называется *интегральным признаком Коши.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$, $x \in [1; +\infty)$, неотрицательная и монотонно убывающая, то для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как функция $f(x)$ монотонна, то она интегрируема по Риману на любом отрезке $[1; \eta]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx = f(1) + \int\limits_1^n f(x)\,dx$$

для любого $n \geq 2$. Поэтому, если интеграл сходится, то и ряд сходится. С другой стороны, если $[\eta]$ — целая часть числа η, то

$$\int_1^{\eta} f(x)\,dx \leq \int_1^{[\eta]+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{[\eta]} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{[\eta]} f(k)$$

для любого $\eta > 1$. Поэтому, если ряд сходится, то интеграл тоже сходится. Теорема 2 доказана.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, который, как известно, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

§ 3. Признаки сходимости рядов с произвольными членами

3.1. Знакопеременные ряды. В этом пункте рассмотрим ряды с действительными членами, которые поочередно то положительные, то отрицательные. Такие ряды называются *знакопеременными* или *знакочередующимися*.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{1}$$

сходится. Причем, если s и s_n — сумма и n-я частичная сумма ряда (1), *то*

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\{a_n\}$ монотонно убывает и, следовательно, $a_n \geq 0$ $\forall n$. Тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-1} a_k \right| = a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} a_{n+p}. \tag{3}$$

Действительно, если p четное, то сумма (3) — это сумма неотрицательных разностей $a_k - a_{k+1}$. Если же p нечетное, то к этим разностям добавится еще одно неотрицательное слагаемое a_{n+p}.

Для оценки суммы (3) заметим, что если p нечетное, то она есть сумма a_{n+1} и разностей $a_{k+1} - a_k \leq 0$, и поэтому не превосходит a_{n+1}. Если же p четное, то из предыдущей суммы вычитается a_{n+p}, поэтому и в этом случае сумма (3) не превосходит a_{n+1}. Таким образом,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-1}a_k\right| \leq a_{n+1} \quad \forall n, p. \tag{4}$$

Поэтому, если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то ряд (1) удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится.

Неравенство (2) следует из неравенства (4) при $p \to \infty$. Теорема доказана.

Эта теорема называется *признаком Лейбница* сходимости знакопеременных рядов.

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^\alpha \tag{5}$$

при любом $\alpha > 0$ удовлетворяет всем условиям признака Лейбница. Поэтому он сходится при любом $\alpha > 0$. При $\alpha \leq 0$ он расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}. \tag{6}$$

При $\alpha \leq 0$ он расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости. При $\alpha > 0$ имеем:

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\alpha}},$$

где $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как ряд с общим членом $u_n = (-1)^n/n^\alpha$ сходится при $\alpha > 0$, а ряд с общим членом

$$v_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\alpha}},$$

сходится только при $2\alpha > 1$, то данный ряд сходится при $\alpha > 1/2$, а при $\alpha \leq 1/2$ расходится.

Легко показать, что последовательность

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha - (-1)^n}$$

будет монотонно убывающей только при $\alpha > 1$. Следовательно, по признаку Лейбница можно лишь утверждать, что ряд (6) сходится при $\alpha > 1$.

3.2. Абсолютно сходящиеся ряды. Для рядов с неотрицательными членами в предыдущем параграфе доказано несколько достаточно простых признаков сходимости, поэтому изучение сходимости произвольных рядов естественно начать с тех случаев, когда оно сводится к изучению сходимости рядов с неотрицательными членами. Здесь полезно следующее общее утверждение о сравнении данного числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{1}$$

с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \tag{2}$$

членами которого являются абсолютные величины членов ряда (1).

Теорема 1. *Если ряд* (2) *сходится, то ряд* (1) *тоже сходится.*

Действительно, так как

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| \quad \forall n, p \in \mathbf{N},$$

и ряд (2), в силу сходимости, удовлетворяет условию Коши, то ряд (1) тоже удовлетворяет условию Коши и поэтому сходится.

Определение. Числовой ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если ряд (2) сходится. Если же ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся.*

Таким образом, теорема 1 утверждает, что любой абсолютно сходящийся ряд сходится. Обратное утверждение является неверным. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$$

сходится при любом $\alpha > 0$, а абсолютно сходится только при $\alpha > 1$, т.е. при $\alpha \in (0; 1]$ он сходится условно.

Сформулируем два почти очевидных свойства абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 2. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *абсолютно сходятся, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *тоже абсолютно сходится.*

Теорема 3. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *абсолютно сходится, а последовательность* $\{c_n\}$ *ограничена, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ *абсолютно сходится.*

Действительно, если $|c_n| \le M\ \forall n$, то

$$|c_n z_n| \le M \cdot |z_n| \quad \forall n,$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n z_n|$ сходится (по признаку сравнения).

Заметим, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится условно, а последовательность $\{c_n\}$ ограничена или даже стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ может расходиться. Например, ряд с общим членом $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ сходится, последовательность $c_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю, однако ряд с общим членом $c_n u_n = 1/n$ расходится.

3.3. Признаки сходимости Дирихле и Абеля. В этом пункте рассмотрим ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{1}$$

где a_n — действительные, а b_n — комплексные числа. Очевидно, при $b_n = (-1)^n$ и $a_n \ge 0$ имеем знакочередующийся ряд (см. п. 3.1).

Теорема 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, то ряд* (1) *сходится.*

Доказательство. Если $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, то, очевидно,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) =$$

$$= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \ldots + a_{n+p}(B_{n+p} - B_{n+p-1}) =$$

$$= -a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_{n+p}B_{n+p}.$$

Это преобразование называется *преобразованием Абеля*. Оно широко используется в теории рядов.

По условию последовательность $\{B_n\}$ ограничена. Пусть

$$|B_n| \le M \quad \forall n \in N.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le M a_{n+1} + M \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) + M a_{n+p},$$

так как $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$. Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 2Ma_{n+1} \quad \forall n, p.$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, поэтому, в силу критерия Коши, данный ряд сходится, причем его n-й остаток имеет оценку:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq 2Ma_{n+1}.$$

Теорема 1 доказана.

Эта теорема называется *признаком Дирихле сходимости ряда*.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^\alpha},$$

где $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$.

При $\alpha \leq 0$ ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

При $\alpha > 0$ последовательность $a_n = 1/n^\alpha$, монотонно убывая, сходится к нулю. Оценим сумму

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}.$$

Для этого заметим, что это есть сумма геометрической прогрессии, причем

$$e^{ix} B_n = B_n - e^{ix} + e^{i(n+1)x}.$$

Поэтому, если $x \neq k\pi$, то

$$B_n = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1},$$

$$|B_n| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \cdot \left|e^{i(n+1)x} - e^{ix}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ данный ряд сходится по признаку Дирихле при любом $x \neq 2k\pi$.

При $\alpha > 1$ он сходится абсолютно, а если $0 < \alpha \leq 1$, то он сходится условно, так как

$$\left|\frac{e^{inx}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}.$$

Так как $\cos nx + i \sin nx = e^{inx}$, то из примера 1 следует, что данные ряды сходятся при любом $x \neq 2k\pi$, если $\alpha > 0$. (Очевидно, второй ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.) При $\alpha > 1$ они сходятся абсолютно при любом $x \in \mathbb{R}$.

Если же $\alpha \in (0; 1]$, $x \neq k\pi$, то данные ряды сходятся условно. Действительно, так как

$$|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2nx,$$

причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ расходится к $+\infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\cos 2nx)/n^\alpha$ сходится, поэтому и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sin nx|/n^\alpha$ расходится. Аналогично рассматривается и другой ряд.

Пример 3. Рассмотрим ряды с общими членами

$$u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n} - \sin n} \quad \text{и} \quad v_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n} - \cos n}.$$

Так как

$$u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\sin^2 n}{n}(1 + o(1))$$

при $n \to \infty$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin n)/\sqrt{n}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin^2 n)/n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже расходится. Далее,

$$v_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\sin n \cdot \cos n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

при $n \to \infty$, причем ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{2n}$$

сходятся, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже сходится.

Теорема 2. *Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд* (1) *сходится.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда последовательность

$$\alpha_n = a_n - a, \quad n \in \mathbb{N},$$

монотонно убывает и $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. В этом случае данный ряд есть сумма двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n,$$

где первый ряд сходится по условию, а второй — по признаку Дирихле. Следовательно, ряд (1) тоже сходится. Теорема 2 доказана.

Из этой теоремы, которая называется *признаком Абеля сходимости ряда*, следует, что члены сходящегося ряда можно умножать на монотонную ограниченную последовательность. "Можно" в том смысле, что вновь полученный ряд тоже будет сходиться.

§ 4. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

4.1. Сочетательное свойство. Понятие суммы ряда существенно отличается от понятия суммы конечного числа слагаемых. Во многих случаях привычные нам свойства сумм для рядов не выполняются. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

Объединим его члены в некоторые группы, не меняя их порядок:

$$a_1 + \ldots + a_{n_1}, a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}, \ldots, a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}, \ldots,$$

и рассмотрим новый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{2}$$

у которого $u_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}$, $u_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}, \ldots$

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится, то ряд* (2) *тоже сходится, и их суммы равны.*

Действительно, последовательность частичных сумм ряда (2) — это подпоследовательность последовательности частичных сумм ряда (1).

Таким образом, сходящийся ряд обладает свойством сочетательности. Однако, если ряд (2) сходится, то ряд (1) может расходиться. Например, ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots$ сходится, а ряд $1-1+1-1+\ldots$ расходится.

Легко показать, что *если в каждой сумме u_k все слагаемые одного знака, то из сходимости ряда* (2) *следует сходимость ряда* (1).

Предлагается доказать это утверждение в качестве упражнения.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, где $[\sqrt{n}]$ — целая часть от $\sqrt{n}$.

Легко видеть, что если объединить члены одного знака, то получим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k, \tag{3}$$

где u_k есть сумма $2k+1$ положительных слагаемых:

$$u_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2-1}.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{1}{k^2+k-1} \le \frac{1}{k},$$

$$\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{k^2+k} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \le \frac{1}{k},$$

поэтому

$$\frac{2}{k+1} < u_k \le \frac{2}{k} \quad \forall k$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$. Кроме того,

$$u_{k+1} \le \frac{2}{k+1} < u_k \quad \forall k,$$

т.е. последовательность $\{u_k\}$ монотонно убывающая.

Следовательно, ряд (3) удовлетворяет всем условиям признака Лейбница и поэтому сходится. Тогда, согласно сделанному выше замечанию, данный ряд тоже сходится.

4.2. О перестановке членов сходящихся рядов. Пусть дан сходящийся ряд. Переставив в нем члены произвольным образом, получим новый ряд. Возникает вопрос, сходится ли новый ряд и будет ли его сумма равна сумме данного ряда. Ответ на этот вопрос существенно зависит от того, как сходится ряд: абсолютно или условно.

Теорема 1. *Если ряд абсолютно сходится, то любой ряд, полученный из данного перестановкой членов, тоже абсолютно сходится, и его сумма равна сумме данного ряда.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ — данный ряд, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ — ряд, который получен из данного перестановкой его членов. Тогда, очевидно,

$$\forall n \quad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|, \tag{1}$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ абсолютно сходится.

Второе утверждение докажем сначала для рядов с неотрицательными членами $z_k = a_k \geq 0$. Для таких рядов из (1) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2}$$

Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{3}$$

так как данный ряд получается из нового ряда тоже перестановкой членов. Из (2) и (3) следует, что суммы этих рядов равны.

Теперь рассмотрим ряды с действительными членами $z_k = c_k$. Положим

$$a_k = \frac{|c_k| + c_k}{2}, \quad b_k = \frac{|c_k| - c_k}{2}. \tag{4}$$

Тогда $c_k = a_k - b_k$, $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $a_k \leq |c_k|$, $b_k \leq |c_k|$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{5}$$

Отсюда и из рассмотренного выше случая следует, что и в этом случае перестановка членов ряда не меняет его сумму.

Пусть, наконец, $z_k = x_k + iy_k$. Тогда $|x_k| \leq |z_k|$, $|y_k| \leq |z_k|$ и, следовательно, ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ абсолютно сходятся, у них можно переставлять члены. А так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k,$$

то данный ряд тоже обладает свойством коммутативности. Теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим условно сходящиеся ряды и установим, что они не обладают свойством коммутативности. Ограничимся только рядами с действительными членами и для них докажем следующую *теорему Римана.*

Теорема 2. *Если ряд с действительными членами сходится условно, то для любого числа A можно так переставить члены этого ряда, что вновь полученный ряд будет сходиться к A.*

Сначала докажем одну лемму.

Лемма. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{6}$$

с действительными членами сходится условно, то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{7}$$

с неотрицательными членами a_k и b_k, определенными по формулам (4), *расходятся и, следовательно,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty.$$

Действительно, если один из рядов (7) сходится, то, в силу равенства (5), сходится и второй. А если оба ряда (7) сходятся, то ряд (6) сходится абсолютно, так как $|c_k| = a_k + b_k$.

Доказательство теоремы 2. Пусть ряд (6) сходится. Через c_k^- и c_k^+ обозначим отрицательные и, соответственно, неотрицательные члены ряда (6), перенумерованные в том порядке, в каком они расположены в ряде. Из доказанной выше леммы следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^- = -\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^+ = +\infty.$$

Пользуясь этим замечанием, следующим образом произведем перестановку членов ряда (6) в случае, когда $A \geq 0$.

Наберем неотрицательных членов c_k^+ столько, чтобы

$$c_1^+ + c_2^+ + \ldots + c_{k_1-1}^+ \leq A < c_1^+ + c_2^+ + \ldots + c_{k_1}^+.$$

Затем выпишем отрицательных членов c_k^- столько, чтобы

$$c_1^+ + \ldots + c_{k_1}^+ + c_1^- + \ldots + c_{m_1}^- \leq A < c_1^+ + \ldots + c_{k_1}^+ + c_1^- + \ldots + c_{m_1-1}^-,$$

и т.д. Легко видеть, что ряд

$$c_1^+ + \ldots + c_{k_1}^+ + c_1^- + \ldots + c_{m_1}^- + \ldots$$

получается из ряда (6) перестановкой его членов и сходится к числу $A \geq 0$.

Аналогично рассматривается и случай $A < 0$. В этом случае нужно начинать с отрицательных членов. Теорема 2 доказана.

Аналогичный образом доказывается, что члены ряда (6) можно переставить так, что сумма нового ряда будет равной $+\infty$ или $-\infty$. Кроме того, можно сделать такую перестановку членов, что новый ряд вообще не будет иметь суммы.

Доказанные утверждения являются следствием того, что условная сходимость осуществляется благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов и поэтому существенно зависит от порядка членов, а абсолютная сходимость основана на быстроте убывания членов и поэтому не зависит от их порядка.

4.3. Умножение рядов. Пусть даны два сходящихся ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1}$$

Рассмотрим всевозможные попарные произведения $a_k b_n$ членов этих рядов. Все эти произведения можно занумеровать многими способами. Например, можно поступить следующим образом. Образуем из них бесконечную прямоугольную матрицу:

$$\begin{matrix}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{matrix}$$

и будем выписывать их по квадратам сверху вниз, а затем справа налево. В результате получим последовательность

$$a_1b_1; \quad a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1; \quad a_1b_3,\ a_2b_3, \ldots$$

Теорема 1. *Если данные ряды* (1) *сходятся абсолютно, то любой ряд, членами которого являются всевозможные попарные произведения $a_k b_n$, расположенные в произвольном порядке, тоже абсолютно сходится, и его сумма равна произведению сумм данных рядов.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ — ряд из всевозможных попарных произведений членов данных рядов (1). Тогда, очевидно,

$$\forall n \quad \exists N: \quad \sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|\right) \left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|\right),$$

и поэтому
$$\sum_{k=1}^{n}|c_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\right) \forall n.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится абсолютно. Из теоремы 1 предыдущего пункта следует, что его сумма не зависит от порядка суммирования. Чтобы найти его сумму, выберем порядок суммирования по квадратам, как указано выше. Тогда, если S_n — n-я частичная сумма ряда из произведений, то, очевидно,
$$S_{n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем равенство
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Теорема 1 доказана.

Заметим, что на практике при умножении рядов (1) обычно произведения $a_k b_n$ суммируют по диагоналям, причем члены, лежащие на одной диагонали, объединяют, т.е. рассматривают ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n \tag{2}$$

где $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Для таких рядов имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Если данные ряды* (1) *сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно, то ряд* (2) *сходится, и его сумма равна произведению сумм данных рядов.*

Доказательство. Положим
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad U_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$$
$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

и докажем, что
$$\lim_{n\to\infty} U_n = A \cdot B. \tag{3}$$

Пусть, для определенности, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно. Проделаем некоторые элементарные преобразования:

$$U_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots + (a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1) =$$
$$= a_1B_{n-1} + a_2B_{n-2} + \ldots + a_{n-1}B_1 =$$
$$= a_1(B + \beta_{n-1}) + a_2(B + \beta_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(B + \beta_1) =$$
$$= A_nB + a_1\beta_{n-1} + a_2\beta_{n-2} + \ldots + a_{n-1}\beta_1.$$

Положим $\gamma_n = a_1\beta_{n-1} + a_2\beta_{n-2} + \ldots + a_{n-1}\beta_1$. Очевидно, равенство (3) будет доказано, если мы покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N: \quad \forall n \geq N \quad |\beta_n| < \varepsilon,$$

поэтому, если $n > N$, то

$$|\gamma_n| < |\beta_1 a_{n-1} + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\widetilde{A},$$

где $\widetilde{A} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$. А так как $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\gamma_n| \leq \varepsilon\widetilde{A}$$

для любого $\varepsilon > 0$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что если оба ряда (1) сходятся условно, то нельзя утверждать, что ряд (2) сходится. Например, умножим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

на этот же ряд, т.е. рассмотрим ряд с общим членом

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, так как $nk - k^2 \leq n^2/4$ и, следовательно,

$$|u_n| \geq \frac{2}{n}(n-1) = 2 - \frac{2}{n} \geq 1$$

для любого $n \geq 2$.

Глава 9. Функциональные последовательности и ряды

§ 1. Сходящиеся и равномерно сходящиеся последовательности и ряды

1.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов. В этом параграфе будем рассматривать последовательности и ряды, членами которых являются комплекснозначные (в частности, и вещественнозначные) функции, определенные на некотором множестве точек прямой, плоскости, n-мерного пространства или, вообще, элементов произвольной природы.

Пусть задана последовательность функций

$$f_n(x), n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

определенных на некотором множестве E.

Определение 1. Последовательность (1) называется *сходящейся в точке* $x_0 \in E$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.

Последовательность (1) называется *сходящейся на множестве* E, если она сходится в каждой точке множества E.

Если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E, \tag{2}$$

то говорят, что *последовательность* (1) *на множестве E сходится к функции* $f(x)$, и пишут "$f_n(x) \to f(x)$ на E" или "$f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$ при $n \to \infty$".

Если выполнено условие (2), то функция $f(x)$ называется *пределом* или *предельной функцией последовательности* (1). В этом случае иногда говорят, что *последовательность* (1) *сходится к функции $f(x)$ поточечно.*

Соответствующим образом определяется и сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{3}$$

члены которого определены на множестве E.

Определение 2. Ряд (3) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in E$, если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится.

Ряд (3) называется *сходящимся на множестве* E, если он сходится в любой точке множества E. Если

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \forall x \in E, \tag{4}$$

то функция $f(x)$ называется *суммой ряда* (3).

Возникает вопрос: сохраняются ли важнейшие свойства функций $f_n(x)$ и $u_n(x)$ при выполнении операций (2) и (4), например, если функции $f_n(x)$ непрерывны, дифференцируемы или интегрируемы, то будет ли обладать этим свойством предельная функция $f(x)$?

Сейчас на примерах покажем, что в общем случае предельная функция не наследует свойств функций данной последовательности.

Пример 1. На отрезке $[-1;1]$ рассмотрим последовательность функций

$$f(x) = (1-x^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта последовательность на отрезке $[-1;1]$ сходится к функции $f(x)$, которая равна 0 для $x \neq 0$ и равна 1 при $x = 0$. Здесь функции $f_n(x)$ непрерывны, а предельная функция $f(x)$ разрывна.

Пример 2. Последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

на $\mathbb{R}$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$. Однако последовательность производных

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$$

не сходится на $\mathbb{R}$. Например, $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пример 3. Последовательность функций

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n$$

на отрезке $[-1;1]$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$. Однако последовательность производных

$$f_n'(x) = (1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1}$$

сходится к функции $\varphi(x)$, которая равна 0 для $x \neq 0$ и равна 1 при $x = 0$.

В примере 1 функции $f_n(x)$ дифференцируемы при $x = 0$, а предельная функция не является дифференцируемой. В примерах 2 и 3 предельная функция тоже дифференцируема при $x = 0$, но

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0).$$

Пример 4. Положим

$$f_n(x) = \lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $n!x$ — целое число, то $f_n(x) = 1$, и, очевидно, $f_n(x) = 0$ для других $x \in \mathbb{R}$.

Эта последовательность сходится при любом $x \in \mathbb{R}$. Причем предельной функцией будет функция Дирихле. Действительно, если x иррациональное, то $f_n(x) = 0\ \forall n$, а если x рациональное и $x = p/q$, то $f_n(x) = 1\quad \forall n \geq q$. Здесь функции $f_n(x)$ интегрируемы по Риману, например, на отрезке $[0;1]$, а предельная функция не является интегрируемой по Риману.

Пример 5. Пусть

$$f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n, x \in [0;1].$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\quad \forall x \in [0;1]$. Однако

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{2(n+1)} \to +\infty$$

при $n \to \infty$.

Пример 6. Пусть

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0;1].$$

Здесь, как и выше, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\quad \forall x \in [0;1]$, но

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

В примерах 5 и 6 функции $f_n(x)$ и $f(x)$ интегрируемы на отрезке $[0;1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

1.2. Равномерная сходимость. В предыдущем пункте была определена поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Там было показано, что при такой сходимости предельная функция не наследует свойств членов последовательности или ряда. Здесь мы определим новый вид сходимости, более сильный, чем поточечная, который позволит нам получить положительные результаты.

Пусть, как и в предыдущем пункте, задана последовательность функций

$$f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

определенных на некотором множестве E.

Определение 1. Последовательность (1) называется *равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве E*, если выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N, \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

В этом случае будем писать "$f_n(x) \to f(x)$ равномерно на E" или "$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E".

Очевидно, если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E, то и $f_n(x) \to f(x)$ на E, так как поточечная сходимость означает, что выполняется условие:

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(x;\varepsilon): \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Заметим, что в условии (2) для данной последовательности номер N зависит только от ε и не зависит от x, а в условии (3) номер N зависит как от ε, так и от x.

Теорема 1. *Для того чтобы $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \qquad (4)$$

Доказательство. Из условия (2) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \qquad (5)$$

А это и означает, что если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E, то выполняется условие (4).

Обратно, если выполняется условие (4), то выполняется условие (5) без знака равенства перед ε и, следовательно, условие (2), т.е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E. Теорема 1 доказана.

Определение 2. Последовательность (1) называется *равномерно сходящейся на множестве E*, если существует функция, к которой она сходится равномерно на этом множестве.

Пример 1. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Очевидно, эта последовательность сходится к нулю на интервале $(0;1)$. Однако к нулю она сходится неравномерно, так как

$$\sup_{x\in(0;1)} x^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, не выполнено условие (4) из теоремы 1. Отсюда и из единственности предела следует, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на интервале $(0;1)$.

Заметим, что на любом отрезке $[0;\delta]$, где $\delta < 1$, последовательность (6) сходится к нулю равномерно, так как

$$\sup_{x\in[0;\delta]} x^n = \delta^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность* (1) *сходилась равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall p, \forall x \in E \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть сначала последовательность (1) сходится равномерно на E, и пусть $f(x)$ — предельная функция. Тогда, согласно определению, выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а так как

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)|,$$

то выполняется и условие (7).

Обратно, пусть выполняется условие (7). Тогда в каждой точке $x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет условию Коши и поэтому сходится к некоторому пределу $f(x)$. Чтобы доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E, в условии (7) зафиксируем n и перейдем к пределу при $p \to \infty$. В результате получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall x \in E \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

А это равносильно тому, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 называется *критерием Коши*, а условие (7) — *условием Коши равномерной сходимости функциональной последовательности*. Очевидно, оно равносильно условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \quad \sup_{x \in E} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Понятие равномерной сходимости естественным образом переносится и на функциональные ряды.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (9)$$

члены которого определены на множестве E.

Определение 3. Функциональный ряд (9) называется *равномерно сходящимся на множестве E*, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно на этом множестве.

Сформулируем еще *критерий Коши равномерной сходимости* применительно к рядам.

Теорема 2'. *Для того чтобы ряд* (9) *сходился равномерно на множестве* E, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall p \quad \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 2, так как условие (10) — это условие (8) для частичных сумм ряда (9). Она называется *критерием Коши*, а условие (10) — *условием Коши равномерной сходимости функционального ряда* (9).

Следствие. *Если ряд* (9) *сходится равномерно на множестве* E, *то* $u_n(x) \rightrightarrows 0$ *на* E, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |u_n(x)| = 0. \tag{11}$$

Это утверждение получается из теоремы 2' при $p = 1$. Условие (11) называется *необходимым условием равномерной сходимости функционального ряда.*

Сформулируем еще один *критерий равномерной сходимости ряда.*

Теорема 3. *Для того чтобы ряд* (9) *сходился равномерно на множестве* E, *необходимо и достаточно, чтобы он сходился на* E *и*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = 0. \tag{12}$$

Действительно, если ряд (9) сходится равномерно на E, то он сходится на E и выполняется условие (10), из которого в пределе при $p \to \infty$ следует условие (12). Наоборот, если ряд (9) сходится и выполняется условие (12), то, очевидно, выполняется и условие (10).

1.3. Признаки равномерной сходимости ряда. Начнем с простейшего и чаще всего применяемого *признака Вейерштрасса.*

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

члены которого определены на некотором множестве E.

Теорема 1. *Если существует последовательность неотрицательных чисел* a_n, $n \in \mathbb{N}$, *таких, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и, начиная с некоторого номера* N,

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in E, \tag{2}$$

то ряд (1) *на множестве* E *сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Из признака сравнения следует, что ряд (1) в каждой точке $x \in E$ сходится абсолютно, и поэтому можно говорить о сумме ряда (1). Тогда, если $n \geq N$, то из условия (2) следует, что

$$\forall x \in E \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

А так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$, то, в силу критерия равномерной сходимости ряда (см. теорему 3 из п. 1.2), данный ряд (1) и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \tag{3}$$

сходятся равномерно на множестве E. Теорема 1 доказана.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, где z — комплексное число. По признаку Вейерштрасса он сходится равномерно в любом круге $|z| \leq r$, где $0 < r < 1$, так как $|z^n| \leq r^n$ для любого z из этого круга, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ сходится.

Заметим, что если ряд (1) удовлетворяет условиям признака Вейерштрасса, то ряд (1) сходится на E не только равномерно, но и абсолютно. Более того, ряд (3) тоже сходится равномерно на E. Между тем возможны случаи, когда ряд (1) сходится равномерно, но не абсолютно. Возможен даже такой случай, когда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно, но ряд (3) сходится неравномерно.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$ по признаку Лейбница, причем сходится условно, так как

$$\frac{1}{x^2+n} \sim \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Из неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}\right| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

следует, что данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (так как выполняются условия критерия равномерной сходимости ряда, см. теорему 3 из п.1.2).

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как при любом $x \in \mathbb{R}$ он сходится по признаку *Лейбница* и, кроме того,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}\right| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ на $\mathbb{R}$ сходится, но неравномерно. Действительно, если $x \neq 0$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

и поэтому

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right| = 1.$$

Пример 4. Исследуем на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Данный ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$, причем сходится абсолютно. Действительно, если $x = 0$, то у него все члены равны нулю, а если $x \neq 0$, то

$$|e^{-nx^2} \sin nx| \leq e^{-nx^2} \quad \forall n,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}$ сходится.

Далее, если $|x| \geq \delta > 0$, то

$$|e^{-nx^2} \sin nx| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-n\delta^2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \setminus (-\delta; \delta)$ при любом $\delta > 0$.

На интервале $(-\delta; \delta)$ он сходится неравномерно, так как

$$\sup_{|x|<\delta} |e^{-nx^2} \sin nx| \geq e^{-1/n} \sin 1 \geq e^{-1} \sin 1$$

для любого $n > 1/\delta$, т.е. не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Теперь рассмотрим знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(x), \tag{4}$$

члены которого $u_n(x) = (-1)^{n-1}a_n(x)$ определены на множестве E и принимают только действительные значения.

Теорема 2. *Если последовательность $\{a_n(x)\}$ при каждом $x \in E$ монотонно убывает и $a_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на E, то ряд* (4) *сходится равномерно на E.*

Доказательство. По признаку Лейбница ряд (4) сходится в каждой точке $x \in E$. Кроме того,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k(x)\right| \le a_{n+1}(x),$$

а так как $a_{n+1}(x) \rightrightarrows 0$ на E, то ряд (4) удовлетворяет всем условиям критерия равномерной сходимости. Следовательно, ряд (4) сходится равномерно на E. Теорема 2 доказана.

По аналогии с числовыми рядами эту теорему будем называть *признаком Лейбница*. Заметим, что в примерах 2 и 3 мы пользовались этим признаком.

В конце рассмотрим ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x), \tag{5}$$

члены которого $u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$ определены на множестве E, причем функции $a_n(x)$ принимают только действительные значения, а функции $b_n(x)$ могут принимать и комплексные значения.

Для таких рядов докажем два признака равномерной сходимости, формулировки которых напоминают *признаки Дирихле и Абеля*, поэтому их так и будем называть. Но прежде дадим одно определение.

Определение. Последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определенных на множестве E, называется *равномерно ограниченной на E*, если существует постоянная M такая, что

$$|f_n(x)| \le M \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Если последовательность $\{a_n(x)\}$ при каждом $x \in E$ монотонна, и $a_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на E, а последовательность $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$ равномерно ограничена на E, то ряд* (5) *сходится равномерно на E.*

Доказательство. По признаку Дирихле ряд (5) сходится при любом $x \in E$. Кроме того,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leq 2M|a_{n+1}(x)|,$$

где число M такое, что $|B_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E$. А так как $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на E, то ряд (5) удовлетворяет всем условиям критерия равномерной сходимости. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если последовательность* $\{a_n(x)\}$ *при каждом* $x \in E$ *монотонна и равномерно ограничена на* E, *а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *сходится равномерно на* E, *то ряд* (5) *тоже сходится равномерно на* E.

Доказательство. По признаку Абеля для числовых рядов ряд (5) сходится при любом $x \in E$. Пусть

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(x).$$

Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(R_{k-1} - R_k) = a_{n+1}R_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k(a_{k+1} - a_k). \quad (6)$$

Положим

$$M_n = \sup_{\substack{x \in E \\ k \geq n}} |R_k(x)|.$$

Тогда из равенства (6) получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq 2M_n|a_{n+1}|.$$

По условию, существует C такое, что $|a_n(x)| \leq C \ \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leq 2CM_n.$$

Теперь осталось заметить, что $M_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E. Теорема 4 доказана.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$.

Если $\alpha > 1$, то данный ряд по признаку Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно, так как

$$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Если $\alpha < 0$, то ряд сходится только для $x = k\pi$, где k — целое,. так как если $x \neq k\pi$, то $\sin nx \not\to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, если бы $\sin nx \to 0$ при $n \to \infty$, то из равенства

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cdot \cos x + \cos nx \cdot \sin x$$

следовало бы, что и $\cos nx \to 0$ при $n \to \infty$, а это противоречит тому, что $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$.

Пусть теперь $0 < \alpha \leq 1$. Тогда данный ряд можно исследовать по признаку Дирихле. Здесь последовательность $a_n = 1/n^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, монотонно убывающая и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Рассмотрим последовательность $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Ранее было доказано, что

$$|B_n(x)| \leq \left|\sin \frac{x}{2}\right|^{-1}.$$

Следовательно, если $\alpha > 0$, то данный ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$: если $x = 2k\pi$, то все его члены равны нулю, если $x \neq 2k\pi$, то он сходится по признаку Дирихле. Причем, если отрезок $[a; b]$ не содержит точек вида $2k\pi$, где k — целое, то данный ряд сходится равномерно на $[a; b]$.

Покажем, что если $0 < \alpha \leq 1$, то исследуемый ряд не сходится равномерно на отрезке $\Delta = [-\pi; \pi]$.

В сумме

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$$

положим $x = 1/2n$. Тогда $0 < k/2n \leq 1 < \pi/2$,

$$\sin \frac{k}{2n} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{2n}.$$

Последнее следует из выпуклости вверх графика функции $y = \sin x$ на интервале $(0; \pi/2)$. Следовательно,

$$\sup_{x\in\Delta} \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \sin \frac{k}{2n} >$$

$$> \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{2n} = \frac{1}{n\pi} \sum_{k=n+1}^{2n} k^{1-\alpha} \geq \frac{1}{n\pi} \cdot n = \frac{1}{\pi},$$

а это означает, что на $[-\pi;\pi]$ не выполняется условие Коши равномерной сходимости.

Пример 6. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\, e^{1/(x^2+n^2)},$$

согласно признаку Абеля, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд из предыдущего примера. Действительно, при любом $x \in \mathbb{R}$ последовательность

$$a_n(x) = e^{1/(x^2+n^2)}$$

монотонна и $1 \leq a_n(x) \leq e$. Следовательно, если $0 < \alpha \leq 1$, то данный ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a;b]$, не содержащем точек вида $2k\pi$, где k — целое, а, например, на отрезке $[-\pi;\pi]$ он не сходится равномерно.

§ 2. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

2.1. Равномерная сходимость и непрерывность. Пусть задана последовательность функций

$$f_n(x), \quad n \in N, \tag{1}$$

определенных на некотором множестве E точек m-мерного пространства. В частности, множество E может быть множеством точек действительной прямой или комплексной плоскости.

Начнем с простейшей теоремы, а именно, с *теоремы о непрерывности предельной функции.*

Теорема 1. *Если последовательность функций* (1) *сходится равномерно на множестве E и каждая из этих функций непрерывна в точке $x_0 \in E$, то предельная функция тоже непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Через $f(x)$ обозначим предельную функцию последовательности (1) и докажем, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Для этого сначала заметим, что для любого $x \in E$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 2\sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{2}$$

Зададим теперь некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда существует N такое, что

$$\sup_{x\in E} |f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E. А так как функция $f_N(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in O_\delta(x_0) \cap E \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому из (2) следует, что

$$\forall x \in O_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если последовательность функций* (1) *сходится равномерно на множестве E и каждая из этих функций непрерывна на E, то предельная функция тоже непрерывна на E.*

Как показывают примеры (см. пример 1 из п. 1.1), требование равномерной сходимости в теореме 1 и следствии 1 не может быть опущено. Однако это требование не является необходимым для непрерывности предельной функции. Например, последовательность $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, на интервале $(0;1)$ хотя и сходится к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$, но сходится неравномерно. Все же в некоторых случаях из непрерывности предельной функции следует равномерная сходимость. В частности, имеет место следующая *теорема Дини.*

Теорема 2. *Пусть последовательность функций* (1) *в любой точке $x \in E$ монотонно убывает. Тогда, если каждая из этих функций непрерывна на E, множество E компактно и последовательность* (1) *сходится к непрерывной на E функции, то эта последовательность сходится равномерно на E.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \varphi_n x = f_n(x) - f(x).$$

Тогда функция $\varphi_n(x)$ непрерывна, $\varphi_n(x) \to 0$ на E и

$$\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Докажем, что $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ на E. Для этого достаточно установить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n: \quad \forall x \in E \quad \varphi_n(x) < \varepsilon. \tag{3}$$

Доказательство будем вести методом "от противного". Предположим, что условие (3) не выполняется, а выполняется противоположное условие:

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \forall n \quad \exists x = x_n \in E: \quad \varphi_n(x_n) \geq \varepsilon.$$

Так как $x_n \in E$ $\forall n$ и множество E компактно, то у последовательности $\{x_n\}$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $x_0 \in E$. Тогда, если $m \leq n_k$, то

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon,$$

и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon \ \forall m$. Однако это противоречит тому, что $\varphi_m(x_0) \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, наше предположение неверное. Теорема 2 доказана.

Отметим, что требование компактности здесь существенно. Например, $x^n \to 0$ при $n \to \infty$ на интервале $(0;1)$, но сходимость неравномерна.

Сформулируем полученные результаты применительно к функциональному ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{4}$$

члены которого определены на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 1′. *Если ряд* (4) *сходится равномерно на множестве E и все его члены непрерывны в точке $x_0 \in E$, то его сумма тоже непрерывна в точке x_0. Если же члены ряда непрерывны на E, то его сумма тоже непрерывна на E.*

Теорема 2′. *Пусть множество E компактно и члены ряда* (4) *непрерывны и неотрицательны на E. Тогда, если ряд* (4) *сходится на E и его сумма непрерывна на E, то он сходится равномерно на E.*

2.2. Равномерная сходимость и повторные пределы. В этом пункте докажем несколько утверждений о повторных пределах. Пусть задана последовательность функций

$$f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

определенных на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, и пусть a — предельная точка множества E (конечная или бесконечная).

Теорема 1. *Если последовательность функций* (1) *сходится равномерно на E и каждая из этих функций имеет предел при $x \to a$, то оба повторных предела*

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

существуют и равны:

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Другими словами, если выполнены условия теоремы, то числовая последовательность

$$y_n = \lim_{x\to a} f_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится, предельная функция $f(x)$ последовательности (1) имеет предел при $x \to a$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Сначала докажем, что последовательность $\{y_n\}$ сходится.

Из равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что для любых $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq N_\varepsilon$ и $x \in E$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Из него в пределе при $x \to a$ получаем:

$$|y_n - y_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию Коши, и поэтому сходится. Через A обозначим ее предел и докажем, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Заметим прежде всего, что

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - A| \qquad (2)$$

для любых $x \in E$ и $n \in \mathbb{N}$.

Зададим теперь некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда из равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на E следует, что

$$\exists N' : \quad \forall n \geq N' \quad \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (3)$$

а из сходимости y_n к A следует, что

$$\exists N'' : \quad \forall n \geq N'' \quad |y_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4)$$

Положим $N = \max\{N'; N''\}$. Для этого N из (2), (3) и (4) получаем неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - y_N| \quad \forall x \in E.$$

А так как $f_N(x) \to y_N$ при $x \to a$, то существует окрестность $O(a)$ точки a такая, что

$$|f_N(x) - y_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in O(a) \cap E, \quad x \neq a.$$

Следовательно,

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in O(a) \cap E, \quad x \neq a.$$

Теорема 1 доказана.

Сформулируем доказанную теорему применительно к функциональному ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{5}$$

члены которого определены на множестве E.

Следствие 1. *Если ряд* (5) *сходится равномерно на* E *и каждый его член имеет предел при* $x \to a$, *то ряд из этих пределов сходится, сумма ряда* (5) *имеет предел при* $x \to a$ *и*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x).$$

Рассмотрим еще так называемые *двойные последовательности*:

$$a_{mn}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 2. *Если последовательность* a_{mn}, $m \in \mathbb{N}$, *сходится при любом* $n \in \mathbb{N}$, *а последовательность* a_{mn}, $n \in \mathbb{N}$, *сходится равномерно относительно* $m \in \mathbb{N}$, *то оба повторных предела существуют и равны:*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}.$$

На примере "двойной последовательности" покажем, что требование равномерной сходимости здесь существенно.

Пример. Пусть

$$a_{mn} = \frac{m}{m+n}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $a_{mn} \to 1$ при $m \to \infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, и $a_{mn} \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn} = 1, \quad \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0.$$

Здесь нет равномерной сходимости ни относительно m, ни относительно n. Действительно,

$$\sup_n |a_{mn} - 1| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\sup_m |a_{mn}| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В конце рассмотрим *повторные ряды*:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{6}$$

Следствие 3. *Если ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ *сходится при любом* $n \in \mathbb{N}$, *а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kn}\right) \tag{7}$$

сходится равномерно относительно $m \in N$, *то оба повторных ряда* (6) *сходятся и их суммы равны:*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \tag{8}$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kn}\right),$$

причем ряд сходится равномерно относительно $m \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} a_{kn}\right),$$

что и доказывает равенство (8).

Вместо этого утверждения удобнее пользоваться более простым достаточным признаком равенства сумм повторных рядов.

Теорема 2. *Пусть при любом* $n \in \mathbb{N}$ *ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|$ *сходится, и пусть* $b_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|$. *Тогда, если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то оба повторных ряда* (8) *сходятся и их суммы равны.*

Доказательство. Ряд (7) сходится равномерно относительно $m \in \mathbb{N}$ по признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{kn}\right| \le b_n \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Кроме того, каждый член ряда (7) имеет конечный предел при $m \to \infty$. Следовательно, оба повторных ряда (6) сходятся, и их суммы равны. Теорема 2 доказана.

2.3. Равномерная сходимость и интегрирование. Пусть задана последовательность функций

$$f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

определенных на некотором отрезке $\Delta = [a; b]$ действительной оси и принимающих действительные или комплексные значения.

Теорема 1. *Если функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке Δ и последовательность* (1) *сходится равномерно на Δ к функции $f(x)$, то последовательность функций*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

тоже сходится равномерно на Δ и

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{3}$$

Действительно, по теореме 1 из п.1.1 функция $f(x)$ непрерывна, а поэтому и интегрируема на $[a;b]$. Кроме того,

$$\sup_{x\in\Delta}\left|F_n(x) - \int_a^x f(t)\,dt\right| \le (b-a)\sup_{x\in\Delta}|f_n(t) - f(t)| \to 0 \tag{4}$$

при $n \to \infty$, что и доказывает теорему 1.

Таким образом, если выполнены условия теоремы 1, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \tag{5}$$

В этом случае говорят, что возможен *предельный переход под знаком интеграла*. Теорема 1 называется *теоремой об интегрировании под знаком предела*.

Докажем обобщение теоремы 1, а именно, откажемся от требования непрерывности рассматриваемых функций.

Теорема 2. *Если функции $f_n(x)$ интегрируемы на отрезке Δ и $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на Δ, то предельная функция $f(x)$ интегрируема, последовательность* (2) *сходится равномерно и справедливо равенство* (3).

Доказательство. Докажем сначала, что функция $f(x)$ интегрируема на Δ. Очевидно, можно ограничиться функциями, принимающими действительные значения.

Пусть $\tau = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение отрезка Δ. Тогда, если $\xi_j \in \Delta_j$ и $\eta_j \in \Delta_j$, то

$$|f(\xi_j) - f(\eta_j)| \le |f(\xi_j) - f_n(\xi_j)| + |f_n(\xi_j) - f_n(\eta_j)| + \\ + |f_n(\eta_j) - f(\eta_j)| \le 2\sup_{x\in\Delta}|f(x) - f_n(x)| + \omega(f_n;\Delta_j),$$

где $\omega(f_n;\Delta_j)$ — колебание функции f_n на множестве Δ_j. Отсюда следует, что

$$\omega(f;\Delta_j) \le 2\sup_{x\in\Delta}|f(x)-f_n(x)| + \omega(f_n;\Delta_j),$$

$$\sum_{j=1}^{N}\omega(f;\Delta_j)|\Delta_j| \le 2(b-a)\sup_{x\in\Delta}|f(x)-f_n(x)| + \sum_{j=1}^{N}\omega(f_n;\Delta_j)|\Delta_j|.$$

Выберем теперь некоторое $\varepsilon>0$. Тогда из равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на Δ следует, что

$$\exists p:\quad 2(b-a)\sup_{x\in\Delta}|f(x)-f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а из интегрируемости $f_p(x)$ на Δ следует, что

$$\exists \tau:\quad \sum_{j=1}^{N}\omega(f_p;\Delta_j)|\Delta_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение $\tau = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_N\}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{N}\omega(f;\Delta_j)|\Delta_j| < \varepsilon,$$

и поэтому функция $f(x)$ интегрируема на Δ.

Остальные утверждения теоремы следуют из неравенства (4). Теорема 2 доказана.

Таким образом, если выполнены условия теоремы 2, то возможен предельный переход под знаком интеграла, т.е. справедлива формула (5).

Сформулируем полученный результат применительно к функциональному ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \tag{6}$$

члены которого определены на отрезке Δ и принимают действительные или комплексные значения.

Следствие. *Если функции $u_n(x)$ интегрируемы на отрезке Δ и ряд* (6) *сходится равномерно на Δ, то сумма ряда* (6) *интегрируема на Δ и*

$$\int_{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta}u_n(x)\,dx. \tag{7}$$

В этом случае говорят, что *допустимо почленное интегрирование ряда*, а само утверждение называют *теоремой о почленном интегрировании ряда*.

Отметим, что требование равномерной сходимости существенно для верности равенств (5) и (7) (см. примеры 4–6 из п.1.1).

В конце докажем теорему о почленном интегрировании функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \tag{8}$$

члены которого определены на некоторой гладкой (или кусочно-гладкой) кривой γ комплексной плоскости.

Теорема 3. *Если функции* $u_n(z)$ *интегрируемы на кривой* γ *и ряд* (8) *сходится равномерно на* γ, *то сумма ряда* (8) *интегрируема на* γ *и*

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma u_n(z)\,dz. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть кривая γ имеет представление $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Тогда, если ряд (8) сходится равномерно на кривой γ, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z(t))z'(t)$$

сходится равномерно на отрезке $[a;b]$. Следовательно, его сумма интегрируема на $[a;b]$, и его можно интегрировать почленно, т.е. справедливо равенство:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z(t))z'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(z(t))z'(t)\,dt.$$

Согласно определению интеграла по кривой γ, это равенство равносильно равенству (9). Теорема 3 доказана.

2.4. Равномерная сходимость и дифференцирование. Пусть задана последовательность функций

$$f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

определенных на некотором отрезке $\Delta = [a;b]$ действительной оси и принимающих действительные или комплексные значения.

С помощью теоремы 1 из предыдущего пункта легко доказывается следующая *теорема о дифференцировании под знаком предела* (или, что то же самое, о *предельном переходе под знаком производной*).

Теорема 1. *Если последовательность* (1) *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in \Delta$, *функции* $f_n(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* Δ *и последовательность производных* $f_n'(x)$ *сходится равномерно на* Δ, *то последовательность* (1) *тоже сходится равномерно на* Δ, *ее предельная функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на* Δ *и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \Delta. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $f_n(x_0) \to y_0$ при $n \to \infty$, и пусть $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на Δ. Тогда, в силу теоремы 1 п.2.3, из равенства

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$$

следует, что

$$f_n(x) \rightrightarrows y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt \quad \text{на} \quad \Delta,$$

и поэтому

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt,$$

где функция φ непрерывна на Δ. Следовательно, $f(x)$ непрерывно дифференцируема на Δ и $f'(x) = \varphi(x)$, т.е. справедлива формула (2). Теорема 1 доказана.

Ценою некоторого усложнения доказательства можно освободиться от предположения о непрерывности производных $f_n'(x)$.

Теорема 2. *Если последовательность* (1) *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in \Delta$, *функции* $f_n(x)$ *дифференцируемы на* Δ *и последовательность* $\{f_n'(x)\}$ *сходится равномерно на* Δ, *то последовательность* (1) *сходится равномерно на* Δ, *ее предельная функция* $f(x)$ *дифференцируема на* Δ *и справедлива формула* (2).

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0,$$

$\varphi_n(x_0) = f_n'(x_0)$. Она сходится равномерно на Δ. Действительно,

$$\varphi_n(x) - \varphi_m(x) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi),$$

где ξ лежит между x и x_0. (Здесь мы применили теорему Лагранжа о среднем к функции $f_n(x) - f_m(x)$.) Следовательно,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \sup_{x\in\Delta} |f_n'(x) - f_m'(x)|$$

для любых n, m и любых $x \in \Delta$. Отсюда и из равномерной сходимости последовательности $\{f_n'(x)\}$ на Δ следует, что $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно на Δ. А так как $f_n(x) = f_n(x_0) + \varphi_n(x)(x - x_0)$, то последовательность (1) тоже сходится равномерно на Δ. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на Δ. Тогда, в силу теоремы 1 из п.2.2 о равенстве повторных пределов,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0),$$

и последний предел существует. Следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0).$$

Чтобы завершить доказательство, заметим, что в рассмотренных пределах точка x_0 может быть любой точкой отрезка Δ. Теорема 2 доказана.

Как показывают примеры 2 и 3 из п.1.1, требование равномерной сходимости последовательности из производных является существенным.

Таким образом, если выполняются условия теоремы 2 (следовательно, и теоремы 1), то

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \forall x \in \Delta,$$

т.е. *операции предельного перехода и дифференцирования можно переставлять.*

Сформулируем полученный результат применительно к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{3}$$

члены которого определены на отрезке Δ и принимают действительные или комплексные значения.

Следствие. *Если ряд* (3) *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in \Delta$, *функции* $u_n(x)$ *дифференцируемы на* Δ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится равномерно на* Δ, *то ряд* (3) *сходится равномерно на* Δ, *его сумма дифференцируема на* Δ *и*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае допустимо *почленное дифференцирование ряда.*

В заключение докажем теорему о почленном дифференцировании функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \tag{4}$$

члены которого определены в некоторой области G комплексной плоскости.

Теорема 3. *Если ряд* (4) *сходится хотя бы в одной точке* $z_0 \in G$, *функции* $u_n(z)$ *непрерывно дифференцируемы в области* G *и ряд из производных сходится равномерно на* G, *то ряд* (3) *сходится на* G, *его сумма непрерывно дифференцируема и*

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} u_n(z). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $z \in G$ и

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z).$$

Так как интеграл от $f_n'(z)$ не зависит от пути интегрирования, то

$$f_n(z) = f_n(z_0) + \int_{z_0}^{z} f_n'(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

где интеграл берется по некоторой гладкой кривой $\gamma \subset G$, соединяющей точки z_0 и z.

Положим

$$a = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0), \quad \varphi(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z), \quad z \in G,$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (6). В результате получаем:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = a + \int_{z_0}^{z} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Здесь предельный переход под знаком интеграла законен, так как последовательность $\{f_n'(\xi)\}$ на кривой γ сходится равномерно.

Таким образом, ряд (4) сходится в любой точке $z \in G$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0) + \int_{z_0}^{z} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда следует, что сумма ряда (4) имеет производную и эта производная вычисляется по формуле (5). Теорема 3 доказана.

2.5. Пример непрерывной нигде недифференцируемой функции. Первый пример непрерывной нигде недифференцируемой функции, определенной на $\mathbb{R}$, был построен Вейерштрассом. Она задавалась рядом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

где $0 < a < 1$, а b — нечетное натуральное число. Очевидно, этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$, и, следовательно, его сумма $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Вейерштрасс показал, что при условии $2(ab - 1) > 3\pi$ у функции $f(x)$ ни в одной точке не существует конечной производной.

Мы рассмотрим более простой пример. Пусть $\varphi(x)$ — четная периодическая функция с периодом $T = 2$, которая равна x, если $0 \le x \le 1$. Очевидно, функция $\varphi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x) \tag{1}$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, и, следовательно, его сумма $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Покажем, что эта функция ни в одной точке не имеет конечной производной.

В силу четности и периодичности функции $f(x)$, заданной рядом (1), достаточно рассмотреть лишь случай, когда $x_0 \in [0; 1]$.

Положим

$$\alpha_n = 4^{-n}[4^n x_0], \quad \beta_n = 4^{-n}([4^n x_0] + 1),$$

где $[4^n x_0]$ — целая часть числа $4^n x_0$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\alpha_n \le x_0 < \beta_n \quad \forall n, \quad \lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0.$$

Заметим, что если $k > n$, то разность $4^k \beta_n - 4^k \alpha_n$ есть целое четное число, и поэтому $\varphi(4^k \beta_n) = \varphi(4^k \alpha_n) \quad \forall k > n$. Следовательно,

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\varphi(4^k \beta_n) - \varphi(4^k \alpha_n)\right). \tag{2}$$

Далее, если $k = n$, то $4^k \beta_n$ и $4^k \alpha_n$ целые, их разность равна 1, и поэтому

$$\varphi(4^n \beta_n) - \varphi(4^n \alpha_n) = \pm 1. \tag{3}$$

Если же $k < n$, то между $4^k \alpha_n$ и $4^k \beta_n$ нет целых чисел, и поэтому

$$\varphi(4^k \beta_n) - \varphi(4^k \alpha_n) = \pm 4^k (\beta_n - \alpha_n) = \pm 4^{k-n} \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^{k-n} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4^n} \cdot \frac{3^n - 3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4^n}.$$

А так как $\beta_n - \alpha_n = 1/4$, то

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \geq \frac{1}{2}(3^n + 3)|\beta_n - \alpha_n|, \quad \forall n > 1.$$

Из последнего неравенства следует, что функция $f(x)$ не может иметь конечной производной в точке x_0.

§ 3. Степенные ряды

3.1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. В этом параграфе будем рассматривать функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

где z_0 и $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — заданные комплексные числа, а z — переменная, принимающая комплексные значения, т.е. $z \in \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел. Такие ряды называются *степенными рядами*. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда* (1)

Отметим, что у степенного ряда счет членов ведется не с единицы, а с нуля: первый член называется нулевым, второй — первым и т.д. Для степенного ряда такой счет является естественным, так как нулевой член u_0 является произведением коэффициента a_0 на многочлен нулевой степени $(z - z_0)^0 = 1$, первый член u_1 есть произведение a_1 на $z - z_0$, и, вообще, n-й член u_n равен произведению коэффициента a_n на многочлен n-й степени $(z - z_0)^n$.

Отметим еще, что любой степенной ряд вида (1) сходится в точке z_0, так что область сходимости любого степенного ряда содержит по крайней мере одну точку. Дальнейшие сведения об устройстве области сходимости степенного ряда дает следующая *теорема Абеля*.

Теорема 1. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке* $z_1 \neq z_0$, *то он сходится абсолютно в любой точке* z *из круга* $|z - z_0| < r_1$, *где* $r_1 = |z_1 - z_0|$.

Доказательство. Так как ряд (1) сходится в точке z_1, то последовательность $\{a_n r_1^n\}$ ограничена. Пусть

$$|a_n r_1^n| \leq M \quad \forall n.$$

Положим $q = \frac{1}{r_1}|z - z_0|$. Тогда

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r_1^n q^n \le M q^n \quad \forall n.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что если $|z - z_0| < r_1$, то ряд (1) сходится абсолютно. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если ряд* (1) *расходится в точке z_2, то он расходится в любой точке z, для которой $|z - z_0| > r_2$, где $r_2 = |z_2 - z_0|$.*

Из теоремы Абеля следует, что для степенного ряда (1) возможны три ситуации:

1. ряд (1) сходится только в точке z_0;
2. ряд (1) сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$;
3. существует число $R > 0$ такое, что для всех z из круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а для всех z, для которых $|z - z_0| > R$, ряд расходится.

Определение. Число $R > 0$, обладающее свойством: ряд (1) сходится, если $|z - z_0| < R$, и расходится, если $|z - z_0| > R$, называется *радиусом сходимости*, а круг $|z - z_0| < R$ — *кругом сходимости* степенного ряда (1).

Если ряд (1) сходится только в точке z_0, то, по определению, $R = 0$. Если же ряд (1) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то $R = +\infty$.

Теорема 2. *У любого степенного ряда* (1) *существует радиус сходимости R, причем*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, и пусть сначала $0 < q < +\infty$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = q \cdot |z - z_0|.$$

Отсюда по признаку Коши для числового ряда следует, что ряд (1) сходится, если $q|z - z_0| < 1$, и расходится, если $q|z - z_0| > 1$.

Следовательно, $R = 1/q$, т.е. справедлива формула (2).

Если $q = 0$, то ряд (1) сходится при любом z, и поэтому $R = +\infty$. Если же $q = +\infty$, то ряд (1) расходится при любом $z \ne z_0$, и поэтому $R = 0$. Можно считать, что в этих случаях тоже справедлива формула (2). Теорема 2 доказана.

Формула (2) называется *формулой Коши–Адамара* для радиуса сходимости степенного ряда (1).

Пример 1. Найдем радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}. \tag{3}$$

Сначала воспользуемся признаком Коши для числовых рядов. Здесь

$$u_n = \frac{z^{2n}}{2^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|z|^2}{2}.$$

Поэтому ряд сходится, если $|z| < \sqrt{2}$, и расходится, если $|z| > \sqrt{2}$. Следовательно, $R = \sqrt{2}$.

Найдем радиус сходимости еще и по формуле Коши–Адамара. Здесь коэффициенты степенного ряда задаются следующим образом: $a_n = 0$ для нечетных n и $a_n = 1/2^k$ для четных $n = 2k$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и, следовательно, $R = \sqrt{2}$.

Отметим, что в любой точке границы круга сходимости ряд (3) расходится. Действительно, если z такое, что $|z| = \sqrt{2}$, то $|u_n| = 1$, и, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Пример 2. Найдем область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \tag{4}$$

Воспользуемся признаком Даламбера для числовых рядов. Здесь

$$u_n = \frac{z_n}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |z|.$$

Следовательно, ряд (4) сходится, если $|z| < 1$, и расходится, если $|z| > 1$, поэтому $R = 1$.

Более того, по признаку Вейерштрасса ряд (4) сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $|z| \le 1$, так как

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall z, |z| \le 1,$$

и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится.

Пример 3. Как мы уже знаем, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

сходится при любом $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, у этого ряда $R = +\infty$.

Рассмотрим еще ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$. Здесь

$$u_n = n!z^n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = +\infty \quad \forall z \neq 0.$$

По признаку Даламбера этот ряд расходится при любом $z \neq 0$. Следовательно, у него $R = 0$.

В рассмотренных примерах для нахождения радиуса сходимости мы применяли признак Коши или признак Даламбера. В конкретных примерах их применение проще, чем применение формулы Коши–Адамара.

Теорема 3. *Степенные ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}, \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \tag{6}$$

имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (1).

Доказательство. Заметим, что ряд (5) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^n.$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ и $\{\sqrt[n]{n|a_n|}\}$ имеют одни и те же частичные пределы. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

что, в силу формулы Коши–Адамара, и доказывает равенство радиусов сходимости степенных рядов (1) и (5).

Аналогично ряд (6) сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^n.$$

А так как

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

то ряд (6) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (1). Теорема 3 доказана.

Отметим, что ряд (5) получается из ряда (1) почленным дифференцированием, а ряд (6) — почленным интегрированием по отрезку $[z_0; z]$, соединяющему точки z_0 и z. Следовательно, теорему 3 коротко можно сформулировать так: *исходный ряд и ряды, полученные из него почленным дифференцированием и почленным интегрированием, имеют один и тот же радиус сходимости.*

3.2. Равномерная сходимость степенных рядов. Как и в предыдущем пункте будем рассматривать степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

с комплексными членами.

Теорема 1. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда* (1). *Тогда, если $R>0$, то ряд* (1) *сходится равномерно на любом замкнутом круге $|z-z_0|\le r$, у которого $r<R$.*

Доказательство. Из определения радиуса сходимости и теоремы Абеля следует, что ряд (1) в точке $z_1 = z_0 + r$ сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. А так как

$$|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n| r^n \quad \forall n$$

при условии $|z-z_0|\le r$, то, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится равномерно в круге $|z-z_0|\le r$. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.*

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (1). В случае $R=0$ круг сходимости, согласно определению, является пустым множеством.

Пусть $R>0$. Рассмотрим некоторую точку z_1 из круга сходимости и положим $\delta = R - |z_1 - z_0|$.

Тогда $O_\delta(z_1)$ содержится в $O_R(z_0)$, а $O_{\delta/2}(z_1)$ содержится в $O_r(z_0)$, $r = R - \delta/2$, где ряд сходится равномерно. А так как члены ряда (1) непрерывны в точке z_1, то его сумма тоже непрерывна в точке z_1. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда степенной ряд сходится в некоторой точке, лежащей на границе его круга сходимости. Сначала рассмотрим ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если R — радиус сходимости ряда* (2), *и ряд сходится при $z=R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0; R]$ действительной оси.*

Доказательство. Если $x \in [0; R]$, то

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно относительно x, а последовательность

$$b_n = \left(\frac{x}{R}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

при любом x монотонна и на $[0; R]$ ограничена:

$$0 \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1.$$

Поэтому, согласно признаку Абеля, ряд (2) сходится равномерно на $[0; R]$. Теорема 2 доказана.

Эта теорема называется *второй теоремой Абеля.*

Обобщим доказанную теорему на случай произвольных степенных рядов (1).

Теорема 3. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится равномерно на отрезке $[z_0, z_1]$, соединяющем точки z_0 и z_1.*

Доказательство. Пусть $z_1 - z_0 = Re^{i\varphi}$. Тогда любая точка отрезка $[z_0; z_1]$ имеет представление

$$z = z_0 + re^{i\varphi},$$

где $r \in [0; R]$.

По условию ряд (1) сходится в точке z_1, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{i\varphi})^n.$$

Так как его члены не зависят от r, то он сходится равномерно на $[0; R]$.

Для любого $z \in [z_0; z_1]$ имеем:

$$a_n(z - z_0)^n = a_n(re^{i\varphi}) = a_n(Re^{i\varphi})\left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad 0 \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq 1 \quad \forall n.$$

По признаку Абеля ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[z_0; z_1]$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если степенной ряд* (1) *сходится равномерно на дуге окружности*

$$\gamma = \{z = z_0 + Re^{i\varphi},\ \varphi \in [\alpha; \beta]\},$$

то он сходится равномерно на круговом секторе

$$G_\gamma = \{z = z_0 + re^{i\varphi},\ r \in [0; R],\ \varphi \in [\alpha; \beta]\},$$

Действительно,

$$a_n(z-z_0)^n = a_n(re^{i\varphi})^n = a_n(Re^{i\varphi})^n\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

причем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(Re^{i\varphi})^n$ сходится равномерно по r и по $\varphi \in [\alpha;\beta]$.

Следовательно, по признаку Абеля ряд (1) сходится равномерно на множестве G_γ.

Пример. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}. \tag{3}$$

Как и в примере 2 п.3.1, показывается, что у этого ряда $R=1$. Однако на границе круга сходимости, т.е. на окружности $|z|=1$, имеются как точки, в которых ряд сходится, так и точки, в которых ряд расходится. Например, в точке $z=1$ ряд (3) расходится, а в точке $z=-1$ он сходится.

Исследуем сходимость ряда (3) на окружности $|z|=1$, т.е. когда $z=e^{i\varphi}$. Для этого воспользуемся признаком Дирихле.

Здесь $a_n = 1/n$ монотонно убывая, стремится к нулю при $n\to\infty$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\varphi}\right)^k = \frac{e^{i\varphi(n+1)}-e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-1} = e^{i\varphi(n+1)/2}\cdot\frac{\sin(n\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\varphi}\right)^k\right| = \frac{|\sin(n\varphi/2)|}{|\sin(\varphi/2)|},$$

поэтому ряд (3) сходится в любой точке $z=e^{i\varphi}$, где $\varphi\in(0;2\pi)$.

Таким образом, ряд (3) сходится в любой точке замкнутого круга $|z|\le 1$, кроме точки $z=1$.

По признаку Дирихле ряд (3), где $z=e^{i\varphi}$, сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha;\beta]\subset(0;2\pi)$. Тогда, как следует из теоремы 4, ряд (3) сходится равномерно на любом круговом секторе

$$G_\gamma = \{z=re^{i\varphi},\quad 0\le r\le 1,\quad \varphi\in[\alpha;\beta]\},$$

где $[\alpha;\beta]\subset(0;2\pi)$. Кроме того, по теореме 1 ряд (3) сходится равномерно на любом круге $|z|\le r$, где $r<1$.

Следовательно, ряд (3) сходится равномерно на любом множестве

$$G=\{z:|z|\le 1\}\setminus O_\delta(1),$$

где $O_\delta(1)$ — δ-окрестность точки $z=1$. Отсюда, в частности, следует, что сумма ряда (5) непрерывна в любой точке z круга $|z|\le 1$, кроме точки $z=1$. В точке $z=1$ сумма ряда равна $+\infty$.

3.3. Аналитические функции. В этом пункте рассмотрим функции комплексного переменного, являющиеся суммами степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \tag{1}$$

Определение 1. Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *аналитической* (или *голоморфной*) *в точке* z_0, если существует $\delta > 0$ такое, что функция $f(z)$ в $O_\delta(z_0)$ есть сумма некоторого степенного ряда вида (1), т.е. если существуют числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in O_\delta(z_0).$$

В этом случае говорят, что *функция* $f(z)$ *в точке* z_0 *разлагается в степенной ряд по степеням* $z - z_0$.

Теорема 1. *Если функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *являются аналитическими в точке* z_0, *то функции* $f(z)+g(z)$, $f(z)-g(z)$ *и* $f(z)g(z)$ *тоже аналитические в точке* z_0.

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in O_{\delta_1}(z_0),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in O_{\delta_2}(z_0).$$

Тогда, очевидно,

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(z-z_0)^n \quad \forall z \in O_\delta(z_0),$$

где $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$.

Далее, в круге сходимости степенные ряды сходятся абсолютно, поэтому, согласно теореме об умножении абсолютно сходящихся рядов,

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in O_\delta(z_0),$$

где $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Аналитическая в точке* z_0 *функция* $f(z)$ *имеет единственное разложение в ряд по степеням* $z - z_0$.

Эта теорема является следствием следующего утверждения.

Лемма. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда* (1). *Тогда, если $R > 0$ и $r_n(z)$ — n-й остаток ряда* (1), *то*

$$r_n(z) = O((z - z_0)^{n+1}) \quad \text{при} \quad z \to z_0 \tag{2}$$

и, следовательно,

$$r_n(z) = o((z - z_0)^n) \quad \text{при} \quad z \to z_0. \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, n-й остаток ряда (1) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (1). Поэтому

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1}\varphi_n(z),$$

где $\varphi_n(z)$ — сумма ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n-1},$$

причем он имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (1). Как уже доказано, функция $\varphi_n(z)$ непрерывна на замкнутом круге $|z - z_0| \leq R/2$. Следовательно, она ограничена на этом круге. Тогда, если $|\varphi_n(z)| < M$ $\forall z \in O_{R/2}(z_0)$, то

$$|r_n(z)| \leq M|z - z_0|^{n+1} \quad \forall z \in O_{R/2}(z_0),$$

а это означает, что выполняется условие (2). Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 2. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \forall z \in O_{\delta_1}(z_0),$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k \quad \forall z \in O_{\delta_2}(z_0).$$

Отсюда и из доказанной леммы, а точнее, из равенства (3) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k - b_k)(z - z_0)^k = o((z - z_0)^n) \quad \text{при} \quad z \to z_0$$

для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ При $n = 0$ имеем: $a_0 - b_0 = o(1)$ при $z \to z_0$, поэтому $a_0 = b_0$. Затем при $n = 1$ после сокращения на множитель $z - z_0$ получаем: $a_1 - b_1 = o(1)$ при $z \to z_0$, поэтому $a_1 = b_1$, и т.д. По индукции получаем, что $a_n = b_n$ $\forall n$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Сумма степенного ряда является аналитической функцией в любой точке круга сходимости.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ — сумма степенного ряда (1). Если $R = 0$, то круг сходимости — это пустое множество. Пусть $R > 0$ и $z_1 \in O_R(z_0)$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z - z_1) + (z_1 - z_0))^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k (z_1 - z_0)^{n-k} (z - z_1)^k \quad (4)$$

для любого $z \in O_R(z_0)$. Если же $|z - z_1| + |z_1 - z_0| < R$, то сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| C_n^k |z - z_1|^k |z_1 - z_0|^{n-k}.$$

Поэтому, согласно теореме 2 из п.2.2 о повторных рядах, в (4) можно поменять порядок суммирования. В результате получим:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k a_n (z_1 - z_0)^{n-k} \right) (z - z_1)^k \quad (5)$$

для любого z такого, что $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$. Следовательно, функция $f(z)$ является аналитической в произвольно выбранной точке $z_1 \in O_R(z_0)$. Теорема 3 доказана.

Заметим, что радиус сходимости ряда (5) может быть больше, чем $R - |z_1 - z_0|$.

3.4. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. В этом пункте будем рассматривать степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (1)$$

с действительными членами, т.е. будем считать, что x_0 и $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — данные действительные числа, а переменная x принимает действительные значения. Для таких рядов так же, как и ранее, определяется радиус сходимости R. Если $0 < R < \infty$, то вместо круга сходимости возникает *интервал сходимости* $(x_0 - R; x_0 + R)$. Если $R = 0$, то интервал сходимости — пустое множество, а если $R = +\infty$, то интервалом сходимости будет интервал $(-\infty; +\infty)$.

Следует, однако, заметить, что все утверждения этого пункта справедливы и во множестве комплексных чисел, практически без изменения доказательств.

Теорема 1. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда* (1), *а $f(x)$ — сумма этого ряда. Тогда, если $R > 0$, то функция $f(x)$ на интервале $(x_0-R; x_0+R)$ непрерывна и для любого $x \in (x_0-R; x_0+R)$*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

т.е. в интервале сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать.

Действительно, согласно теореме 1 из предыдущего пункта, ряд (1) сходится равномерно на любом отрезке $[x_0 - r; x_0 + r] \subset \subset (x_0-R; x_0+R)$, поэтому утверждение теоремы следует из теоремы о почленном интегрировании функционального ряда.

Теорема 2. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда* (1), *а $f(x)$ — сумма этого ряда. Тогда, если $R > 0$, то функция $f(x)$ в интервале $(x_0-R; x_0+R)$ имеет производные любого порядка, которые находятся почленным дифференцированием ряда* (1).

Действительно, согласно теореме 3 из п.3.1, почленно продифференцированный ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и ряд (1), поэтому он сходится равномерно на любом отрезке $[x_0 - r; x_0 + r] \subset (x_0 - R; x_0 + R)$, и утверждение теоремы следует из теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ является аналитической в точке x_0, т.е. в некоторой δ-окрестности точки x_0 она является суммой степенного ряда вида* (1), *то*

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Действительно, продифференцировав n раз обе части равенства

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

и положив $x = x_0$, получим $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда степенной ряд (1), коэффициенты которого определены по формулам (2), называется *рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.*

В случае, когда $x_0 = 0$, ряд Тейлора иногда называют *рядом Маклорена.*

Из теорем 2 и 3 следует, что если функция $f(x)$ аналитическая в точке x_0, то она в некоторой окрестности точки x_0 бесконечно дифференцируема и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

т.е. в этой окрестности она разлагается в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Возникает вопрос: когда бесконечно дифференцируемая в точке x_0 функция будет аналитической в этой точке, другими словами, когда ее ряд Тейлора сходится к ней в некоторой окрестности точки x_0?

3.5. Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора). Чтобы ответить на вопрос, поставленный в конце предыдущего пункта, для функции $f(x)$, которая определена и бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0, рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + r_n(x), \tag{1}$$

где $r_n(x)$ — n-й остаточный член формулы Тейлора. Из нее видно, что *функция $f(x)$ есть сумма своего ряда Тейлора в некоторой δ-окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in O_\delta(x_0).$$

Следующий пример показывает, что не всякая бесконечно дифференцируемая функция является аналитической.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x)$ такую, что $f(0) = 0$ и $f(x) = e^{-1/x^2}$ для $x \neq 0$.

Эта функция при $x \neq 0$ имеет производные любого порядка, которые легко вычисляются:

$$f'(x) = 2x^{-3}e^{-x^{-2}}, \quad f''(x) = -6x^{-4}e^{-x^{-2}} + 4x^{-6}e^{-x^{-2}}$$

и т.д. Вообще,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где $P_n(1/x)$ — некоторый многочлен от $1/x$. По правилу Лопиталя находим, что

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Аналогично находим, что $f^{(n)}(0) = 0$. Таким образом, данная функция на всей действительной оси имеет производные любого порядка. Однако она не является аналитической в точке $x = 0$, так как $f(x) \neq 0$ для любого $x \neq 0$, а все коэффициенты ее ряда Тейлора в точке $x = 0$ равны нулю.

Докажем теперь одну простую теорему, полезную во многих важных случаях.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда, если*

$$\exists M \cdot \quad |f^{(n)}(x)| \le M \quad \forall x \in O_\delta(x_0), \quad \forall n,$$

то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in O_\delta(x_0).$$

Доказательство. Для функции $f(x)$ напишем формулу Тейлора (1) с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0. Тогда $|f^{(n+1)}(\xi)| \le M$, и поэтому

$$|r_n(x)| \le M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

для любого n и любого $x \in O_\delta(x_0)$. А это и доказывает теорему, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Очевидно, многочлен, задающий эту функцию, является ее рядом Тейлора в точке $x_0 = 0$.

Пример 3. Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \cos x$. Эта функция на всем бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$ удовлетворяет условиям доказанной теоремы, поэтому

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример 4. Функция $f(x) = e^x$ удовлетворяет условиям теоремы на любом конечном интервале. Следовательно,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример 5. Легко видеть, что

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \forall n, \quad \forall x \neq 1.$$

Следовательно, если $|x| < 1$, то

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1.$$

Проинтегрировав обе части последнего равенства по x, получим:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad |x| < 1.$$

Отметим, что, в силу второй теоремы Абеля, последнее равенство справедливо и при $x = 1$.

Перед следующим примером заметим, что из интегральной формы остаточного члена формулы Тейлора

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n \, dt$$

и теоремы о среднем следует, что

$$\exists \Theta \in (0;1): \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{n+1}(x_0 + \Theta\Delta x)(\Delta x - \Theta\Delta x)^n \Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$. Следовательно,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{n+1}(x_0 + \Theta\Delta x)(1-\Theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

Это — *остаточный член в форме Коши.*

Пример 6. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Этот ряд, называемый *биномиальным рядом с показателем* α, имеет вид

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

По признаку Даламбера он сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$. Докажем, что он сходится к $(1+x)^\alpha$. Для этого рассмотрим остаточный член формулы Тейлора в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Легко видеть, что если $x \in (-1;+1)$, то $0 < 1-\theta < 1+\theta x$. Поэтому

$$|r_n(x)| \le \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-1}|x|^n.$$

Здесь θ зависит как от x, так и от n. Положим

$$b_n(x) = \alpha(1+\theta x)^{\alpha-1},$$

$$a_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^n.$$

При каждом фиксированном $x \in (-1;+1)$ последовательность $\{a_n(x)\}$ сходится к нулю, так как $a_n(x)$ — это n-й член биномиального ряда с показателем $\alpha-1$, а последовательность $\{b_n(x)\}$ ограничена, так как $1-|x| \le 1+\theta x \le 1+|x|$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in (-1;1),$$

и поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\eta+1)}{n!} x^n$$

для любого $x \in (-1;1)$.

Из этой формулы, в частности, получаем:

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n,$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n,$$

где $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)$, $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$. Эти разложения справедливы для любого $x \in (-1;1)$.

Пример 7. Разложим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора по степеням x.

Так как

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

то, проинтегрировав обе части этого равенства, получим:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Отметим, что полученный ряд сходится и при $x = \pm 1$ (по признаку Лейбница), а по второй теореме Абеля его сумма равна $\pm\pi/4$. Таким образом,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Пример 8. Производная функции $\arcsin x$, как следует из разложения функции $(1+x)^{-1/2}$ (см. Пример 6), разлагается в ряд следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Поэтому, интегрируя обе части этого равенства, получаем:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

3.6. Показательная и тригонометрические функции комплексного переменного. Ранее показательная функция от $z = x + iy$ определялась равенством:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{1}$$

Это определение в какой-то степени является искусственным. Более естественным представляется определение функции e^z с помощью степенного ряда, исходя из разложения

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Показательную функцию e^z определим равенством:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{2}$$

Ряд (2) сходится при любом $z \in \mathbf{C}$, поэтому функция e^z определена на всей комплексной плоскости. Покажем, что

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{3}$$

для любых комплексных z_1 и z_2.

Так как степенной ряд (2) сходится абсолютно при любом z, то ряды для e^{z_1} и e^{z_2} можно перемножать почленно. Поэтому

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} \frac{z_1^n \cdot z_2^k}{n!k!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^m}{m!} = e^{z_1+z_2}.$$

Из свойства (3) следует, что если e^z определена равенством (2), то для нее справедливо равенство (1). Действительно, если $z = x + iy$, то

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} =$$

$$= e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}\right) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отсюда видно, что если e^z определена равенством (1), то для нее справедливо разложение (2).

Аналогично тому, как была определена функция e^z, тригонометрические функции $\cos z$ и $\sin z$ комплексного переменного z определим равенствами:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbf{C}; \tag{4}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{5}$$

Данные определения являются естественными, так как при $z = x$ эти функции совпадают с $\cos x$ и $\sin x$, и, кроме того, они обладают многими характерными свойствами этих функций. Из определений e^z получаем:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Поэтому, в силу формул (4) и (5),

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Если здесь z заменить на $-z$, то получим равенство:

$$e^{iz} = \cos z - i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{8}$$

Формулы (6), (7), (8) называются *формулами Эйлера*. С помощью этих формул докажем, например, формулу для синуса суммы:

$$\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_2 \cdot \cos z_1 =$$

$$= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \sin(z_1 + z_2).$$

Таким образом,

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_2 \cdot \cos z_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

Из последней формулы следует, что

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

3.7. Связь между аналитичностью и дифференцируемостью функций на комплексной плоскости. Напомним, что функция $f(z)$ называется аналитической (голоморфной) в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности точки z_0 и в этой окрестности разлагается в степенной ряд по степеням $z - z_0$.

Определение. Функция $f(z)$, $z \in G$, называется *аналитической* (или *голоморфной*) *в области* G, если она голоморфна в любой точке этой области.

На комплексной плоскости, как и на действительной прямой, доказывается, что если функция $f(z)$ является аналитической в области G, то она в G бесконечно дифференцируема. На действительной прямой обратное утверждение является неверным, а вот на комплексной плоскости имеет место даже более сильное утверждение.

Теорема. *Если функция $f(z)$ в области G имеет непрерывную производную, то она в этой области является аналитической.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in G$, и пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(z_0) \subset G$. Через $\gamma_\varepsilon(z_0)$ обозначим окружность радиуса ε с центром в точке z_0. Тогда, согласно интегральной формуле Коши,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \forall z \in O_\varepsilon(z_0). \tag{1}$$

Разложим функцию $1/(\zeta - z)$ в ряд по степеням $z - z_0$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad z \in O_\varepsilon(z_0). \tag{2}$$

Этот ряд сходится равномерно по ζ на γ_ε, так как если $\zeta \in \gamma_\varepsilon(z_0)$, то

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{\varepsilon} < 1, \quad z \in O_\varepsilon(z_0).$$

Ряд, полученный из этого ряда почленным умножением на $f(\zeta)$, тоже сходится равномерно на γ_ε, так как функция $f(\zeta)$ ограничена на γ_ε.

Подставим разложение (2) в равенство (1) и воспользуемся тем, что равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно. В результате получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in O_\varepsilon(z_0), \tag{3}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Следовательно, функция $f(z)$ аналитическая в точке z_0, а так как точка z_0 — произвольная точка области G, то функция $f(z)$ аналитическая в G. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(z)$ в области G имеет непрерывную производную первого порядка, то она в этой области бесконечно дифференцируема.*

Заметим, что имеет место более сильное утверждение:

Если функция $f(z)$ дифференцируема в области G, то она бесконечно дифференцируема в G.

Это утверждение обычно доказывается в учебниках по теории функций комплексного переменного.

Приложение

Таблица производных простейших элементарных функций

$(C)' = 0 \quad (C$ — постоянная);

$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x, \quad a > 0;$

$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad x > 0;$

$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}, \quad x > 0,\ a > 0;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0;$

$(|x|)' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x;$

$(\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{cosec}^2 x;$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

Таблица интегралов простейших элементарных функций

$$\int 0\,dx = C;$$

$$\int x^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

Формулы Тейлора для простейших элементарных функций

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$e^{-x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x_n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$